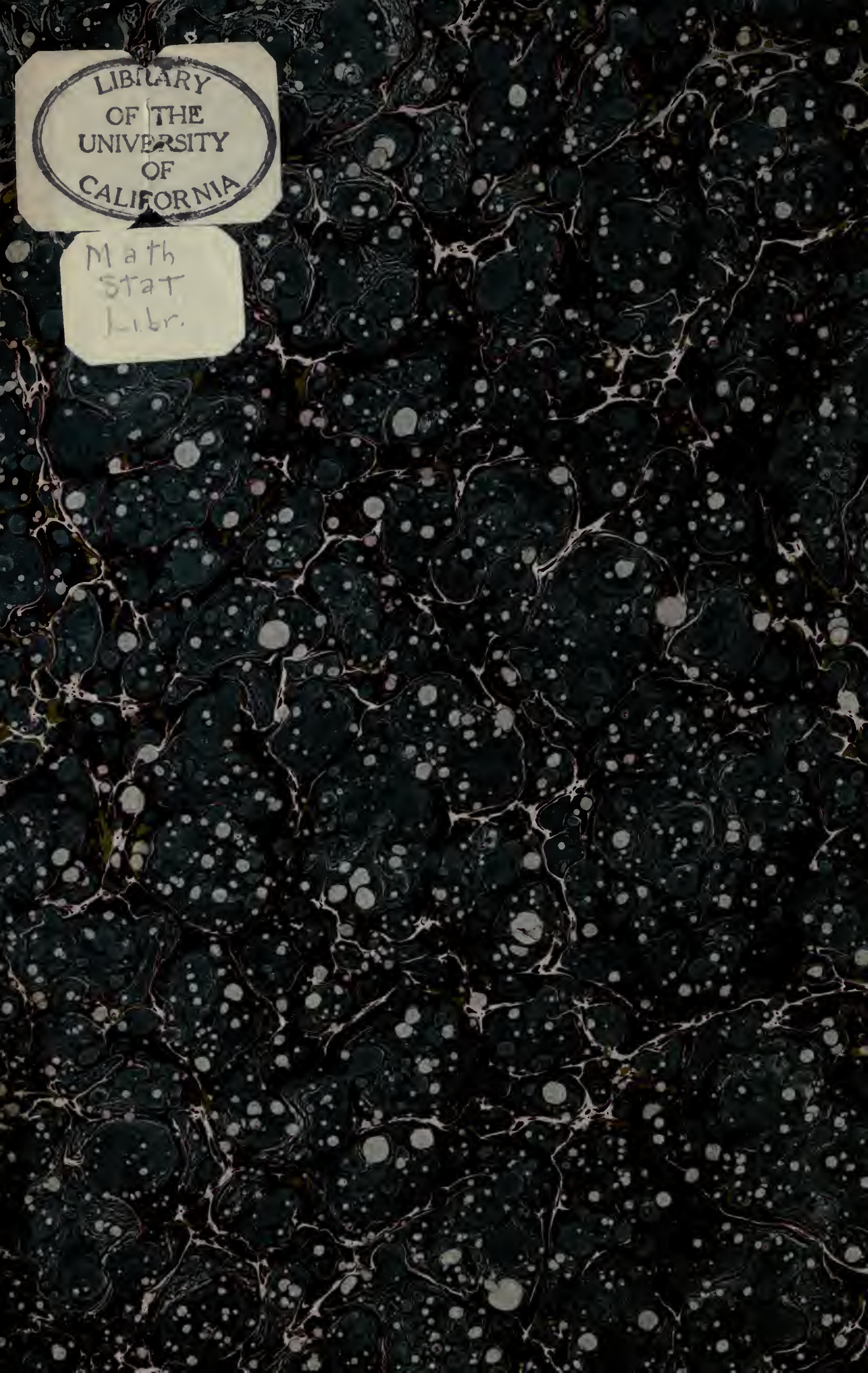



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA
Math
Stat
Libr.











VORLESUNGEN

ÜBER

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DES RAUMES.

Vorrede zur ersten Auflage.

Dieses Lehrbuch verdankt seine Entstehung den Universitäts-Vorträgen, welche ich in Königsberg, Halle und Heidelberg über die analytische Geometrie des Raumes gehalten habe, um meine Zuhörer in die analytisch-geometrischen Theorien einzuführen, und sie zu selbstständigen Untersuchungen in diesem Gebiete zu veranlassen.

Es setzt die Bekanntschaft des Lesers mit der Differential-Rechnung voraus. Zwar findet man am Ende der einundzwanzigsten, zweiundzwanzigsten und dreiundzwanzigsten Vorlesung einige Integral-Formeln von Lamé und von Jacobi, jedoch lassen sich diese Stellen ohne Beeinträchtigung des Zusammenhanges auch übergehen. Um aus der Geometrie der Kegelschnitte nichts mehr als die Elemente vorauszusetzen, ist in der einundzwanzigsten Vorlesung das analytische Problem der Hauptaxen der Kegelschnitte im Zusammenhange mit den confocalen Kegelschnitten und den elliptischen Coordinaten nachgetragen worden.

Die Symmetrie neben der Dualität der Behandlungsweise, welche sich mit ihren Consequenzen durch das ganze Buch hindurchzieht, wird zur leichteren Auffassung erheblich beitragen, und dasselbe vorzugsweise als ein Lehrbuch der genannten Disciplin empfehlen.

Heidelberg, im October 1861.

Vorrede zur neuen Auflage.

Die Anordnung des Stoffes ist in dieser Auflage fast ungeändert geblieben. Die einzige Ausnahme bildet die Vorlesung über die Transformation homogener Functionen zweiter Ordnung, welche den Vorlesungen über Coordinatentransformation und über Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung früher voranging, hier nachfolgt. Diese Aenderung ist gemacht worden, um in den vorausgeschickten Vorlesungen lebhafteres Interesse für die nachfolgende zu erregen.

Beiträge, welche die verflossenen acht Jahre geliefert haben, sind an den passenden Stellen aufgenommen worden. Auch Beispiele der Anwendung sind hinzugekommen, wie am Ende der Vorlesung über die Anwendung der Determinanten.

Neu sind zwei Vorlesungen aus der analytischen Mechanik.

Die eine von diesen Vorlesungen über die Axen des Körpers konnte den übrigen Vorlesungen eingereiht werden, weil der Gegenstand sich als ein rein geometrischer auffassen liess.

Die andere Vorlesung über Planetenbewegung, welche das D'Alembert'sche Princip der Mechanik voraussetzt, bildet den Anhang. Sie ist darum hier aufgenommen worden, weil sie Gelegenheit giebt, vorgetragene Sätze über Determinanten und Rotationsoberflächen zweiter Ordnung in gefälliger Weise in Anwendung zu bringen.

München, im November 1869.

O. Hesse.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Zweite Vorlesung.

Die Ebene im Raume.

Dritte Vorlesung.

Ebenen im Raume.

Vierte Vorlesung.

Das Pascal'sche Sechseck und damit verwandte Figuren.

Fünfte Vorlesung.

Der Punkt im Raume und Punkte im Raume.

Sechste Vorlesung.

Homogene Coordinaten. Gerade Linien im Raume.

Siebente Vorlesung.

Determinanten.

Achte Vorlesung.

Ganze homogene Functionen. Anwendungen der Determinanten.

Neunte Vorlesung.

Allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Zehnte Vorlesung.

Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung.

Elfte Vorlesung.

Weitere allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Zwölfte Vorlesung.

Fortsetzung der zehnten Vorlesung über Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung. Reciprocität.

Dreizehnte Vorlesung.

Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung. Transformation der Coordinaten mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen.

Vierzehnte Vorlesung.

Criterium des Kegels zweiter Ordnung. Tangentenkegel der Oberfläche zweiter Ordnung.

Fünfzehnte Vorlesung.

Criterium der Grenzfläche zweiter Ordnung. Die Schnittcurve einer Ebene und einer Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche zweiter Ordnung aufgefasst.

Sechszehnte Vorlesung.

Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen.

Siebenzehnte Vorlesung.

Grenzflächen zweiter Ordnung, welche acht, beliebig gegebene Ebenen berühren.

Achtzehnte Vorlesung.

Lineare Coordinaten-Transformation. Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte.

Seite

Neunzehnte Vorlesung.

Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen.

Zwanzigste Vorlesung.

Transformation homogener Functionen zweiter Ordnung durch lineare homogene Substitutionen.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Curven zweiter Ordnung. Confocale Kegelschnitte und elliptische Coordinaten in der Ebene.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung. Confocale Oberflächen zweiter Ordnung und elliptische Raumcoordinaten.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Kürzeste Linien auf dem Ellipsoid.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Focalcurven der Oberflächen zweiter Ordnung.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Die Axen des Körpers.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Geometrische Deutnng der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$, von welcher die Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängen.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Bedingungen für die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Schnitte von Oberflächen zweiter Ordnung und Ebenen. Kreisschnitte.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Krümmungsradien der Normalschnitte und schiefen ebenen Schnitte der Oberflächen.

Dreissigste Vorlesung.

Krümmungscurven der Oberflächen.

Einunddreissigste Vorlesung.

Das Theorem von Dupin.

Anhang.

Planetenbewegung.

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Die Aufgabe der analytischen Geometrie ist eine vierfache. Sie lehrt erstens gegebene Figuren durch Gleichungen ersetzen, zweitens transformirt sie diese Gleichungen in Formen, die sich für die geometrische Deutung eignen, drittens vermittelt sie den Uebergang von den transformirten oder gegebenen Gleichungen zu den ihnen entsprechenden Figuren. Da die transformirten Gleichungen aber aus den durch die Figur gegebenen Gleichungen folgen, so ist auch das geometrische Bild der transformirten Gleichungen, das ist eine zweite Figur, eine Folge der gegebenen. Diese Folgerung einer zweiten Figur aus einer gegebenen nennt man einen geometrischen Satz. Sie lehrt also viertens mit Hülfe des Calculs auch geometrische Sätze entdecken.

Als Hülfsmittel zu den genannten Zwecken dient das Coordinaten-System von Cartesius. Im engeren Sinne versteht man darunter drei auf einander senkrecht stehende feste Ebenen, Coordinaten-Ebenen. Die Schnittlinien je zweier von ihnen heissen Coordinaten-Axen. Der den drei Coordinaten-Axen gemeinschaftliche Punkt wird der Anfangs-Punkt des Systemes genannt.

Die drei von einem gegebenen Punkte auf die Coordinaten-Ebenen gefällten Lothe, Coordinaten des Punktes, sind durch die Lage des Punktes bestimmt. Umgekehrt wird die Lage des Punktes durch diese Lothe unzweideutig bestimmt sein, wenn nicht allein die Grösse, sondern auch die Richtung dieser, den Coordinatenaxen parallelen, Lothe gegeben ist.

Um die Richtung der genannten Lothe zu definiren, denke man sich, dass jede der drei Coordinatenaxen aus zwei, vom Coordinatenanfangspunkte nach entgegengesetzten Richtungen ausgehenden, Strahlen zusammengesetzt sei. Die eine, gleichviel welche, wird als die positive, die andere als die negative Richtung der Coordinatenaxe angenommen. So oft nun eines der drei Lothe der Richtung der ihm parallelen Coordinatenaxe entgegengesetzt ist, erhält es das positive Vorzeichen, im anderen Falle das negative. Nach diesen Festsetzungen hat jeder Punkt des Raumes seine bestimmten Coordinaten, und jede drei reellen Grössen können als die Coordinaten eines bestimmten Punktes angesehen werden.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume bezeichnet man mit den Buchstaben x, y, z. Die ihnen parallelen Coordinatenaxen werden respective die x Axe, die y Axe, die z Axe genannt. Die Coordinatenebenen endlich werden durch zwei der genannten Buchstaben bezeichnet nach den Coordinatenaxen, welche in ihnen liegen.

Man kann aber die Coordinaten eines gegebenen Punktes noch auf eine zweite Art bestimmen, die in manchen Fällen den Vorzug verdient vor der angegebenen Bestimmungsweise. Fällt man nämlich drei Perpendikel von dem gegebenen Punkte auf die drei Coordinatenaxen, so sind die Abschnitte auf den Coordinatenaxen, vom Anfangspunkte des Systems gerechnet, den Coordinaten des Punktes gleich, wenn man festsetzt, dass diese Abschnitte positiv zu nehmen sind auf der positiven Seite der Axen, dagegen negativ auf der negativen Seite. Es steht daher auch frei, diese Abschnitte als die Coordinaten des Punktes zu betrachten.

Sind demnach a, b, c die Coordinaten eines gegebenen Punktes im Raume, so sind die drei Gleichungen:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

der analytische Ausdruck des Punktes, und umgekehrt ist ein ganz bestimmter Punkt des Raumes das geometrische Bild für diese drei Gleichungen in der Voraussetzung, dass a, b, c gegebene reelle Grössen bedeuten. Dieser Punkt liegt in der yz Ebene, wenn $a = 0$; er liegt in der z Axe, wenn

$a = b = 0$; er ist endlich der Anfangspunkt des Coordinatensystems, wenn $a = b = c = 0$.

Wenn also ein bestimmter Punkt im Raume das geometrische Bild ist jener drei Gleichungen, so drängt sich zunächst die Frage auf, welches das geometrische Bild sein werde einer dieser Gleichungen, zum Beispiel der Gleichung:

$$x = a.$$

Die Coordinaten x, y, z aller Punkte, die in einer der yz Ebene parallelen und von ihr um den Abstand a entfernten Ebene liegen, genügen dieser Gleichung, und umgekehrt alle Punkte, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, liegen in der genannten Ebene. Aus diesem Grunde wird die angegebene Gleichung die Gleichung jener Ebene genannt. Sie ist der analytische Ausdruck für die Ebene, weil die Coordinaten aller Punkte in ihr der Gleichung genügen, und die Ebene ist das geometrische Bild der Gleichung, weil alle Punkte, deren Coordinaten der Gleichung genügen, in der genannten Ebene liegen. In dieser Weise sind $y = b$ und $z = c$ die Gleichungen zweier Ebenen, die von den Coordinatenebenen zx und xy um b und c abstehen und ihnen parallel sind.

Die Coordinaten aller Punkte der Schnittlinie der beiden Ebenen $y = b$ und $z = c$ genügen zugleich den beiden Gleichungen:

$$y = b, \quad z = c$$

und umgekehrt alle Punkte, deren Coordinaten den beiden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen, liegen in jener Linie. Diese beiden Gleichungen sind daher der analytische Ausdruck für jene Linie und umgekehrt. Die angegebenen beiden Gleichungen nennt man daher die Gleichungen der geraden Linie, in welcher sich die beiden Ebenen schneiden.

Wenn man diese Betrachtungen ausdehnt, so sieht man, dass eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z eines Punktes das Aequivalent ist für eine räumliche Fläche, Oberfläche; dass zwei Gleichungen derselben Art eine Curve, die Schnittcurve der beiden Oberflächen, darstellen, von denen jede durch eine der genannten Gleichungen ausgedrückt ist; dass endlich drei Gleichungen analytisch diejenigen Punkte

darstellen, in welchen sich die drei durch die drei Gleichungen ausgedrückten Oberflächen schneiden.

Die Coordinaten eines Punktes sind auch unzweideutig durch irgend drei lineare Gleichungen zwischen diesen Coordinaten bestimmt. Die geometrische Bedeutung einer dieser linearen Gleichungen ist die zunächst liegende Frage, deren Beantwortung in der nächstfolgenden Vorlesung erfolgen soll, nachdem wir einige Fundamental-Sätze und -Aufgaben vorausgeschickt haben, die hier und in der analytischen Geometrie überhaupt von häufiger Anwendung sind.

(1) . . . Die senkrechte Projection einer begrenzten geraden Linie auf eine unbegrenzte andere ist gleich der begrenzten geraden Linie, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der beiden geraden Linien.

Wenn man von den Endpunkten einer begrenzten geraden Linie Lothe fällt auf eine unbegrenzte, so ist das zwischen den Fusspunkten der Lothe liegende Stück der unbegrenzten geraden Linie die senkrechte Projection der ersteren. Im Falle der eine Begrenzungspunkt der erstern in der unbegrenzten geraden Linie liegt, ist der angegebene Satz nichts anderes als der Ausdruck der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Hypotenuse und den eingeschlossenen Winkel. Um den Satz auf diesen Fall zurückzuführen, lege man zwei Ebenen durch die Endpunkte der begrenzten geraden Linie, senkrecht gegen die unbegrenzte gerade Linie. Das zwischen diesen Ebenen liegende Stück der unbegrenzten geraden Linie wird die gesuchte senkrechte Projection sein. Ihr gleich sind alle durch die beiden Ebenen begrenzten Stücke der mit der unbegrenzten Linie parallelen Linien. Wählt man aber unter diesen parallelen Linien gerade die, welche durch einen Endpunkt der begrenzten Linie geht, und nimmt für die senkrechte Projection das von den beiden Ebenen begrenzte Stück dieser Linie, so hat man den erwähnten Fall. Denn man nennt Neigungswinkel zweier gegebenen geraden Linien, die sich nicht schneiden, den Winkel, der durch zwei gerade Linien gebildet wird, die den gegebenen parallel von einem und demselben Punkte ausgehen. Das sind hier die begrenzte

gerade Linie und die mit der unbegrenzten parallele Linie, welche durch den einen Endpunkt der ersteren geht.

(2) ... Die senkrechte Projection einer begrenzten Ebene auf eine unbegrenzte andere ist ihrem Flächeninhalte nach gleich dem Flächeninhalte der begrenzten Ebene, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der beiden Ebenen.

Wenn man von sämmtlichen Begrenzungspunkten einer begrenzten Ebene Lothe fällt auf eine andere unbegrenzte Ebene, so begrenzen die Fusspunkte der Lothe eine Figur in der unbegrenzten Ebene, die man die senkrechte Projection der begrenzten Ebene nennt. Da man jede begrenzte Ebene durch gerade Linien in Dreiecke zertheilen kann, die als die Elemente der begrenzten Ebene zu betrachten sind, so braucht man den angegebenen Satz nur für ein Dreieck nachzuweisen, selbst nur für ein Dreieck, dessen Grundlinie der unbegrenzten Ebene parallel ist. Denn das Dreieck lässt sich noch durch eine, durch eine Ecke desselben gelegte mit der unbegrenzten Ebene parallele, Linie in zwei Elementardreiecke zerlegen, deren gemeinschaftliche Grundlinie der unbegrenzten Ebene parallel ist.

Ein solches Elementardreieck hat mit seiner senkrechten Projection gleiche Grundlinie und die Projection der Höhe ist die Höhe des projicirten Dreiecks. Die projicirte Höhe ist aber nach (1) gleich der Höhe des Elementardreiecks, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider Höhen, d. i. des Neigungswinkels der beiden Ebenen. Vergleicht man daher die Flächeninhalte des Elementardreiecks und seiner Projection, ausgedrückt durch Grundlinie und Höhe, so hat man den angegebenen Satz für das Elementardreieck. Nimmt man nun statt des Elementardreiecks die Summe aller Elementardreiecke und statt der Projection des Elementardreiecks die Summe der Projectionen der Elementardreiecke, so ergiebt sich der oben angegebene Satz.

(3) ... Wenn α, β, γ die Winkel sind, die eine gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet, oder eine Ebene mit den Coordinatenebenen, so ist:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Eine Ebene bildet mit drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen dieselben Neigungswinkel, als das Loth der Ebene mit den drei auf einander senkrecht stehenden Schnittlinien je zweier von den drei Ebenen. Nach diesem Fundamentalsatze aus der Stereometrie braucht man den angegebenen Satz nur für eine gerade Linie nachzuweisen. Er gilt dann auch für eine Ebene.

Da alle parallelen Linien dieselben Winkel mit den Coordinatenaxen bilden, so kann man annehmen, dass die gerade Linie, von welcher der angegebene Satz handelt, durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems geht. Schneidet man nun auf dieser vom Anfangspunkt des Coordinatensystems in der Richtung, in welcher sie mit den positiven Coordinatenaxen die genannten Winkel bildet, ein Stück ab, welches gleich der Einheit ist, und legt durch den Begrenzungspunkt des Stückes drei den Coordinatenebenen parallele Ebenen, so schliessen diese und die drei Coordinatenebenen ein Parallelepipedum ein, dessen Diagonale der Einheit gleich ist. In einem rechtwinkligen Parallelepipedum ist aber das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate der drei von einer Ecke auslaufenden Kanten. Die Kanten des Parallelepipedums, welche von dem Anfangspunkt des Coordinatensystemes ausgehen, sind aber die Cosinusse der Neigungswinkel der Diagonale mit ihnen. Hiernach ist der zu beweisende Satz nichts anderes, als der analytische Ausdruck des oben angeführten Satzes der Stereometrie.

(4) . . . Die Entfernung D zweier durch ihre Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 gegebenen Punkte wird durch die Gleichung bestimmt:

$$D^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2.$$

Die senkrechten Projectionen der beiden Punkte auf die Coordinatenaxen begrenzen auf denselben Stücke, die den Coordinaten dieser Punkte gleich sind. Es sind demnach:

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1$$

die senkrechten Projectionen der Verbindungslinie D der beiden durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte. Nach Satz (1) kann man diese Projectionen auch ausdrücken durch:

$$D \cos\alpha\,, \quad D \cos\beta\,, \quad D \cos\gamma\,,$$

wenn α, β, γ die Winkel bedeuten, die die Linie D mit den Coordinatenaxen bildet. Man hat daher:

$$D \cos\alpha = x - x_1\,, \quad D \cos\beta = y - y_1\,, \quad D \cos\gamma = z - z_1\,.$$

Quadrirt man diese Gleichungen, so erhält man durch Addition mit Rücksicht auf (3) die Gleichung (4).

(5) ... Wenn $\varDelta$ den Flächeninhalt einer begrenzten ebenen Figur und A, B, C die Flächeninhalte der senkrechten Projectionen derselben bedeuten auf die drei Coordinatenebenen, so ist:

$$\varDelta^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Denn man hat nach (2):

$$\varDelta \cos\alpha = A\,, \quad \varDelta \cos\beta = B\,, \quad \varDelta \cos\gamma = C\,,$$

wenn α, β, γ die Neigungswinkel der Ebene sind, in welcher die begrenzte Figur liegt, zu den Coordinatenebenen. Quadrirt man aber diese Gleichungen und addirt sie, so erhält man mit Rücksicht auf (3) die Gleichung (5).

Wenn man drei auf einander senkrecht stehende Ebenen durch irgend eine vierte schneidet, so schliessen die vier Ebenen eine dreiseitige rechtwinklige Pyramide ein. Von den sie begrenzenden Dreiecken nennt man das in der vierten Ebene liegende das Hypotenusendreieck, die drei anderen die Kathetendreiecke. Letztere sind die senkrechten Projectionen des Hypotenusendreiecks auf die drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen. Man hat daher den Satz:

„In einer dreiseitigen rechtwinkligen Pyramide ist das „Quadrat des Hypotenusendreiecks gleich der Summe der „Quadrate der Kathetendreiecke“.

(6) ... Wenn α, β, γ die Neigungswinkel sind, die eine gerade Linie im Raume mit den Coordinatenaxen bildet, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die entsprechenden Neigungswinkel einer anderen geraden Linie, und v der Winkel, den die beiden geraden Linien mit einander bilden, so ist:

$$\cos v = \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1\,.$$

Da es sich nur um die Richtung der geraden Linien handelt, so kann man annehmen, dass beide gerade Linien von dem Coordinatenanfangspunkt ausgehen. Trägt man auf jede derselben in der Richtung, in der sie die genannten Winkel mit den positiven Coordinatenaxen bilden, ein Stück gleich der Einheit auf und verbindet die Endpunkte dieser Stücke durch eine gerade Linie, so hat man nun ein gleichschenkliges Dreieck. Das Quadrat der ungleichen Seite D dieses Dreiecks, deren Endpunkte die Coordinaten haben $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, lässt sich in doppelter Weise ausdrücken. Einmal nach Satz (4) wie folgt:

$$D^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma_1)^2$$

das andere Mal durch die beiden Seiten des Dreiecks und den von ihnen eingeschlossenen Winkel v:

$$D^2 = 2 - 2\cos v.$$

Setzt man diese beiden Werthe von D^2 einander gleich, so erhält man mit Rücksicht auf (3) die Gleichung (6).

Quadrirt man die Gleichung (6) und zieht beide Seiten der Gleichung von der Einheit ab, so erhält man:

$$\sin^2 v = 1 - (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)^2$$

oder mit Rücksicht auf (3):

$$\sin^2 v = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) - (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)^2,$$

welche Gleichung sich leicht in die elegantere Form bringen lässt:

$$(7) \quad \ldots\ldots \sin^2 v = (\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma)^2 + (\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta)^2.*)$$

---

*) So einfach auch die Transformation des rechten Theiles der vorhergehenden Gleichung in den rechten Theil der Gleichung (7) ausgeführt werden kann, so wollen wir doch bemerken, dass sie ein ganz specieller Fall eines allgemeinen, in der siebenten Vorlesung bewiesenen Determinanten-Satzes ist, der sich so aussprechen lässt:

„Wenn

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n, \quad B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_n^n, \quad C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n$$

Alle Theile dieser Gleichung haben eine geometrische Bedeutung, mit deren Berücksichtigung sich die Gleichung auch aus (5) herleiten lässt.

Man denke sich zu diesem Zwecke ein Dreieck in der xy Ebene, dessen Spitze in dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes liegt. Die Coordinaten der beiden anderen Ecken des Dreiecks seien x, y und x_1, y_1. In dieser Voraussetzung findet man den doppelten Inhalt, $2\varDelta$ des Dreiecks:

(8) . . . . . $2\varDelta = xy_1 - x_1 y.$

Die senkrechte Projection des vorhin erwähnten gleichschenkligen Dreiecks auf die xy Ebene ist ein Dreieck, dessen Spitze im Anfangspunkte des Coordinatensystemes liegt. Die Coordinaten der beiden anderen Ecken sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$. Es ist daher $2C = \cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta$ der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks. Die doppelten Flächeninhalte $2A$, $2B$, $2C$ der senkrechten Projectionen des gleichschenkligen Dreiecks auf die drei Coordinatenebenen sind daher:

$$2A = \cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma,$$
$$2B = \cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha,$$
$$2C = \cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta,$$

während der doppelte Inhalt $2\varDelta$ des gleichschenkligen Dreiecks selbst ist:

$$2\varDelta = \sin v.$$

(9) . . . Den körperlichen Inhalt Π einer dreiseitigen Pyramide zu bestimmen, wenn die Kanten r, r_1, r_2 gegeben sind, die in einer Ecke der Pyramide zu-

---

„und $\qquad c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \ldots + a_n^\varkappa b_n^\lambda,$

„so ist nicht allein: $\qquad C = A \,.\, B,$

„sondern auch:

$$\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda} = \frac{\partial A}{\partial a_0^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_0^\lambda} + \frac{\partial A}{\partial a_1^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_1^\lambda} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial a_n^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_n^\lambda}.$$

Der rechte Theil dieser letzten Gleichung geht nämlich über in die Summe von Quadraten, aus welcher eben der rechte Theil der Gleichung (7) besteht, wenn die Elemente a den entsprechenden Elementen b gleich werden.

sammenstossen, und die Winkel α, α_1, α_2, die diese Kanten einschliessen.

Der doppelte Inhalt der Grundfläche der Pyramide, gebildet von den beiden Kanten r, r_1, die den Winkel α_2 einschliessen, ist:

$$r r_1 \sin \alpha_2 .$$

Die Höhe der Pyramide ist:

$$r_2 \sin \alpha_1 \sin A,$$

wenn A der Neigungswinkel der beiden Seitenflächen der Pyramide ist, welche sich in der Kante r schneiden. Man hat daher:

$$6\,\Pi = r r_1 r_2 \sin A \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 .$$

Es bleibt noch übrig, den Sinus des Neigungswinkels A der beiden Seitenflächen der Pyramide auszudrücken durch die Winkel α, α_1, α_2. Zu diesem Zwecke beschreibe man um die in Rede stehende Ecke der Pyramide als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius $= 1$. Auf der Kugeloberfläche schneiden die drei in dem Mittelpunkte der Fläche zusammenlaufenden Seitenflächen der Pyramide ein sphärisches Dreieck ab, dessen Seiten sind α, α_1, α_2, von denen die beiden letzteren α_1 und α_2 den Winkel A einschliessen. Alsdann hat man:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos A .$$

Setzt man den durch diese Gleichung bestimmten Werth von $\cos A$ ein in:

$$6\,\Pi = r r_1 r_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sqrt{(1 - \cos^2 A)},$$

so erhält man:

$$(10) \ldots \quad 6\,\Pi = r r_1 r_2 \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2 \\ \quad + 2 \cos \alpha \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{array} \right\}} .$$

Man kann diese Gleichung auch in folgende elegantere Form bringen:

$$(11) \ldots \quad 6\,\Pi = 2 . r r_1 r_2 \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{-\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ \sin \frac{\alpha - \alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \alpha_1 - \alpha_2}{2} \end{array} \right\}},$$

woraus man den bekannten Ausdruck für den doppelten Inhalt eines ebenen Dreiecks erhält, gebildet von den Seiten

α, α_1, α_2, wenn man annimmt, dass diese Seiten unendlich klein und $r = r_1 = r_2 = 1$. Denn man hat unter dieser Voraussetzung eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche das ebene Dreieck und deren Höhe $= 1$.

Die angegebenen Ausdrücke für den 6fachen Inhalt der dreiseitigen Pyramide beweisen zugleich folgenden Satz:

(12) . . . Zwei dreiseitige Pyramiden, welche zwischen denselben in einer Ecke zusammenstossenden Kanten beschrieben werden, sind ihrem körperlichen Inhalte nach einander gleich, wenn das Produkt der drei Kanten in der einen Pyramide gleich ist dem Product der entsprechenden Kanten in der anderen Pyramide.

(13) . . . Den körperlichen Inhalt einer dreiseitigen Pyramide zu bestimmen, deren Spitze in dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes liegt, während die übrigen Ecken durch ihre Coordinaten gegeben sind.

Wir beginnen die Auflösung dieser Aufgabe mit der Darstellung des Inhaltes Δ eines in der xy Ebene gelegenen Dreiecks durch die Coordinaten seiner Ecken. Legt man in eine der Ecken des Dreiecks den Anfangspunkt eines neuen dem ersteren parallelen Coordinatensystems und bezeichnet in diesem die Coordinaten der beiden anderen Ecken des Dreiecks mit $\xi_2 \eta_2$ und $\xi_3 \eta_3$, so hat man nach (8):

$$2\Delta = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 .$$

Sind nun die gegebenen Coordinaten der drei Ecken des Dreiecks in dem ursprünglichen Coordinatensystem respective:

$$A_1 B_1 , \quad A_2 B_2 , \quad A_3 B_3 ,$$

so hat man:

$$\xi_2 = A_2 - A_1 , \quad \xi_3 = A_3 - A_1 ,$$
$$\eta_2 = B_2 - B_1 , \quad \eta_3 = B_3 - B_1 .$$

Setzt man diese Werthe in den für den doppelten Inhalt des Dreiecks angegebenen Ausdruck, so erhält man:

(14) . . . $2\Delta = (A_2 B_3 - A_3 B_2) + (A_3 B_1 - A_1 B_3) + (A_1 B_2 - A_2 B_1)$.

Denkt man sich nun die von der Spitze auslaufenden Kanten der gegebenen dreiseitigen Pyramide durch eine der xy Ebene parallele Ebene so geschnitten, dass diese Ebene eine neue Pyramide begrenzt von demselben körperlichen Inhalte, als die gegebene, und nimmt an, dass die Ecken der neuen Pyramide die Coordinaten haben $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$, wobei zu bemerken ist, dass:

$$C_1 = C_2 = C_3,$$

so hat man:

$$6\Pi = (A_2B_3 - A_3B_2)\, C_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\, C_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\, C_3.$$

Die drei von der Spitze ausgehenden Kanten der gegebenen Pyramide seien r_1, r_2, r_3, die ihnen entsprechenden Kanten der zweiten Pyramide seien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Alsdann hat man folgende Relationen:

$$A_1 = \frac{\varrho_1}{r_1} X_1, \quad A_2 = \frac{\varrho_2}{r_2} X_2, \quad A_3 = \frac{\varrho_3}{r_3} X_3,$$

$$B_1 = \frac{\varrho_1}{r_1} Y_1, \quad B_2 = \frac{\varrho_2}{r_2} Y_2, \quad B_3 = \frac{\varrho_3}{r_3} Y_3,$$

$$C_1 = \frac{\varrho_1}{r_1} Z_1, \quad C_2 = \frac{\varrho_2}{r_2} Z_2, \quad C_3 = \frac{\varrho_3}{r_3} Z_3,$$

wenn $X_1 Y_1 Z_1$, $X_2 Y_2 Z_2$, $X_3 Y_3 Z_3$ die Coordinaten der drei Ecken der gegebenen Pyramide bedeuten.

Setzt man diese Werthe für die verschiedenen Grössen A, B, C in den gefundenen Ausdruck von 6Π und berücksichtigt, dass nach (12) $r_1 r_2 r_3 = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$, weil die beiden Pyramiden der Voraussetzung nach gleichen Inhalt haben, so erhält man:

$$(15) \ldots \; 6\Pi = (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) Z_1 + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) Z_2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) Z_3.$$

(16) ... Den körperlichen Inhalt Π irgend eines Tetraeders durch die Coordinaten der vier Ecken auszudrücken.

Die Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich aus dem Vorhergehenden. Denn wählt man ein Coordinatensystem dem vorigen parallel, in Rücksicht auf welches die Coordinaten der Spitze der dreiseitigen Pyramide sind x, y, z und die

Coordinaten der übrigen Ecken $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, so hat man folgende Relationen:

$$(17) \ldots \begin{array}{lll} X_1 = x_1 - x, & X_2 = x_2 - x, & X_3 = x_3 - x, \\ Y_1 = y_1 - y, & Y_2 = y_2 - y, & Y_3 = y_3 - y, \\ Z_1 = z_1 - z, & Z_2 = z_2 - z, & Z_3 = z_3 - z. \end{array}$$

Man braucht nur diese Werthe (17) in (15) einzusetzen, um den gesuchten Ausdruck für den 6fachen Inhalt des Tetraeders zu erhalten, ausgedrückt durch die Coordinaten der vier Ecken: 0, 1, 2, 3.

Um eine Einsicht in diesen weiten Ausdruck von 6Π zu erhalten, der vollständig entwickelt 24 Glieder umfasst, von welchen die eine Hälfte das positive, die andere das negative Vorzeichen hat, gehen wir zurück auf den analog gebildeten Ausdruck (14) für den doppelten Inhalt des Dreiecks. Derselbe ändert sein Vorzeichen, wenn man zwei Ecken des Dreiecks mit einander vertauscht. Daher giebt die Gleichung (14) nicht den absoluten Werth des doppelten Inhaltes 2Δ des Dreiecks, sondern sie giebt den doppelten Inhalt des Dreiecks mit dem positiven oder negativen Vorzeichen je nach der Bezeichnung der Ecken. Dasselbe gilt auch von (8) und (15). Dasselbe gilt auch von dem Ausdrucke des 6fachen Inhalts des Tetraeders durch die Coordinaten der Ecken. Dieser Ausdruck ändert nämlich nur sein Vorzeichen, wenn man zwei von den drei Ecken 1, 2, 3 mit einander vertauscht. Da die gelöste Aufgabe (16) aber eine symmetrische ist in Rücksicht auf alle vier Ecken des Tetraeders, so wird auch das Resultat ein symmetrisches sein müssen, in der Art, dass, was von zwei bestimmten Ecken gilt, auch für irgend zwei gelten muss. Vertauscht man also in dem erwähnten Ausdrucke von 6Π die Coordinaten irgend zweier von den vier Ecken des Tetraeders, so ändert derselbe nur sein Vorzeichen.

Dieser Ausdruck von 6Π ist ferner linear in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes 1, ebenso in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes 2 oder 3. Obwohl er scheinbar von der dritten Ordnung ist in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes 0, so wird er in der Entwickelung auch in Rücksicht auf diese Coordinaten linear sein müssen. Er ist also

linear in Rücksicht auf die Coordinaten einer, gleichviel welcher, Ecke des Tetraeders.*)

Denkt man sich die drei Ecken 1, 2, 3 des Tetraeders gegeben, die Ecke 0 aber variabel, so verschwindet 6Π jedes Mal, wenn die variable Ecke in die durch 1, 2, 3 gelegte Ebene fällt. Umgekehrt wenn 6Π verschwindet, so liegt die variable Ecke in der genannten Ebene. Es ist demnach:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6\Pi = 0$$

der analytische Ausdruck, die Gleichung, der Ebene, die durch die drei gegebenen Punkte hindurchgeht, und umgekehrt, ist die genannte Ebene das geometrische Bild jener Gleichung.

Die Gleichung jeder Ebene stellt sich hiernach als eine lineare dar in der Form:

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Es entsteht aber die Frage, ob auch jeder Gleichung von dieser Form als geometrisches Bild derselben eine Ebene im Raume entspricht. Diese Frage würde man dadurch beantworten können, dass man nachwiese, wie jeder lineare Ausdruck der Coordinaten mit einem zu bestimmenden Factor multiplicirt sich auf die angegebene Form 6Π zurückführen lässt. Allein da der Ausdruck 6Π nicht einfach genug ist, so werden wir den angedeuteten Weg zur Beantwortung der angeregten Frage verlassen, indem wir sie in der folgenden Vorlesung von einem anderen Gesichtspunkte aus wieder aufnehmen.

---

*) Die eigentliche Natur des Ausdruckes 6Π, welche in der analytischen Geometrie allerdings von der grössten Bedeutung ist, lässt sich an dieser Stelle ohne weitere Hülfsmittel nicht darlegen; sie wird erst mit den Determinanten in der achten Vorlesung hervortreten.

Zweite Vorlesung.

Die Ebene im Raume.

Wenn man in irgend einem Punkte einer gegebenen Ebene auf derselben zwei gleich grosse Lothe nach den entgegengesetzten Seiten von der Ebene errichtet, so ist es eine charakteristische Eigenschaft eines beliebigen Punktes p der Ebene, dass die Entfernungen dieses Punktes von den Endpunkten q, q' der beiden Lothe einander gleich sind. Denn von keinem andern Punkte ausserhalb der Ebene gilt dasselbe. Drückt man daher diese Eigenschaft durch eine Gleichung aus, so wird man die Gleichung der Ebene haben.

Der Kürze wegen kann man annehmen, dass der Punkt q' der Anfangspunkt sei des Coordinatensystemes, welches zum Grunde gelegt wird. In dieser Voraussetzung erhält man den Punkt q, indem man vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes auf die gegebene Ebene ein Perpendikel fällt und dieses Perpendikel um sich selbst über die Ebene hinaus verlängert. Der Endpunkt q dieser Verlängerung habe die Coordinaten a, b, c, der beliebige Punkt p der Ebene habe die Coordinaten x, y, z. Drückt man nun die Gleichung $(pq)^2 = (pq')^2$ durch die gegebenen Coordinaten der Punkte nach (4) der ersten Vorlesung aus, so erhält man die Gleichung der Ebene:

$$(1) \quad \ldots \quad x^2 + y^2 + z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

welche auf folgende zurückführt:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad ax + by + cz - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 0.$$

Man ersieht hieraus, dass jede Ebene durch eine lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes in ihr ausgedrückt wird.

Es ist aber auch umgekehrt jede lineare Gleichung:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

der analytische Ausdruck einer Ebene im Raume. Diese Behauptung wird sich dadurch rechtfertigen, dass man nachweiset, wie die Gleichung (3) auf die Form (2) gebracht werden kann. Denn da (2) wieder auf (1) zurückführt, so wird man

die auf (1) zurückgeführte Gleichung (3) als den Ausdruck jener charakteristischen Eigenschaft der Ebene auffassen können.

Multiplicirt man die Gleichung (3) mit einem noch unbestimmten Factor μ und setzt die Coefficienten gleicher Variabeln in den Gleichungen (2) und (3) einander gleich, so erhält man folgende vier Gleichungen zwischen den vier Unbekannten μ, a, b, c:

$$\mu A = a, \quad \mu B = b, \quad \mu C = c, \quad -\mu D = \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

woraus man durch Auflösung nach den Unbekannten erhält:

$$\mu = \frac{-2D}{A^2+B^2+C^2},$$

$$a = \frac{-2DA}{A^2+B^2+C^2},$$

$$b = \frac{-2DB}{A^2+B^2+C^2},$$

$$c = \frac{-2DC}{A^2+B^2+C^2}.$$

Hiernach führt die mit dem Factor μ multiplicirte Gleichung (3) zurück auf (2), in welcher a, b, c die angegebenen Werthe haben, und die Gleichung (2) schliesslich auf (1).

Die Gleichung (3) mit den willkürlichen Constanten A, B, C, D wird die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene genannt zum Unterschiede von der zunächst folgenden, die in vielen Fällen grosse Vortheile gewährt.

Auf die eben angedeutete Form gelangt man, wenn man in (2) statt der Coordinaten des Punktes q die Winkel α, β, γ einführt, welche das vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes gefällte Loth mit den Coordinatenaxen bildet, und den senkrechten Abstand δ der Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt. Projicirt man zu diesem Zwecke die Verbindungslinie des Coordinatenanfangspunktes und des Punktes q auf die Coordinatenaxen, so erhält man die Coordinaten des Punktes q, oder nach (1) der ersten Vorlesung:

$$a = 2\delta \cos\alpha, \quad b = 2\delta \cos\beta, \quad c = 2\delta \cos\gamma.$$

Setzt man diese Werthe von a, b, c in (2), so erhält man mit Rücksicht auf (3) der ersten Vorlesung:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0.$$

Diese Form der Gleichung wird die Normalform der Gleichung der Ebene genannt. In ihr bedeuten α, β, γ die Winkel, welche die Normale der Ebene mit den Coordinatenaxen oder, was dasselbe ist, die Winkel, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen bildet, und δ den senkrechten Abstand der Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt, der immer positiv angenommen wird.

(5) . . . Die gegebene Gleichung einer Ebene in der allgemeinen Form ist zurückzuführen auf die Normalform, oder, was dasselbe ist, die Winkel sind zu bestimmen, welche die Normale der Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, und der senkrechte Abstand der Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt.

Wenn (3) und (4) die Gleichungen derselben Ebene sind, so können diese Gleichungen sich nur durch einen Factor von einander unterscheiden. Multiplicirt man daher die Gleichung (3) mit einem Factor μ, so wird sich derselbe so bestimmen lassen, dass die Gleichungen (3) und (4) Glied für Glied übereinstimmen. Man hat daher:

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -\delta.$$

Aus diesen vier Gleichungen kann man mit Zuziehung der bekannten Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ die 5 Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ berechnen und erhält:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\delta = \frac{-D}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

Da δ in der Gleichung (4) als eine positive Grösse betrachtet wird, so hat man der Quadratwurzelgrösse $\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}$

in allen Formeln das entgegengesetzte Vorzeichen von D zuzuertheilen. Zu bemerken ist hier noch der Factor

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

durch welchen die allgemeine Form (3) der Gleichung der Ebene auf die Normalform (4) zurückgeführt wird.

Man kann noch folgende Form der Gleichung einer Ebene hervorheben:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} - 1 = 0,$$

die bemerkenswerth ist wegen der einfachen Bedeutung der Constanten m, n, p in ihr. Man erkennt nämlich leicht, dass diese Grössen die von der Ebene auf den Coordinatenaxen abgeschnittenen Stücke ausdrücken.

Da nach (5) die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene, unter welcher auch die Form (6) begriffen ist, sich auf die einfachste Weise auf die Normalform zurückführen lässt, so kann man, ohne der Allgemeinheit der Betrachtungen Eintrag zu thun, letztere als die gegebene betrachten, wie in folgender Aufgabe:

(7) . . . Den senkrechten Abstand Δ eines durch seine Coordinaten X, Y, Z gegebenen Punktes P von einer durch ihre Gleichung in der Normalform gegebenen Ebene zu ermitteln.

Da man den senkrechten Abstand des Coordinatenanfangspunktes von der Ebene nach (5) unter allen Umständen als positiv zu betrachten hat, so wird der senkrechte Abstand eines Punktes von der gegebenen Ebene positiv oder negativ sein, je nachdem dieser Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Ebene, oder auf der entgegengesetzten liegt. Nimmt man daher, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an, dass der Punkt P mit dem Coordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der durch ihre Gleichung:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0$$

gegebenen Ebene liege, und legt eine Ebene parallel der gegebenen durch den Punkt P, so wird ihre Gleichung:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta' = 0,$$

indem δ' den senkrechten Abstand dieser Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt bedeutet; und da der Punkt P in ihr liegt, so hat man:

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma - \delta' = 0.$$

Der senkrechte Abstand $\varDelta$ des Punktes P von der Ebene ist:

$$\varDelta = \delta - \delta'.$$

Setzt man in diese Gleichung für δ' den Werth aus der vorhergehenden, so erhält man:

$$-\varDelta = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma - \delta.$$

Dieses Resultat lässt sich in Worten also wiedergeben:

(8) . . . Wenn man den linken Theil einer in der Normalform (4) gegebenen Gleichung einer Ebene von ihrem rechten Theile, der $=0$ ist, trennt, so drückt jener den negativen senkrechten Abstand des durch die Coordinaten x, y, z gegebenen Punktes von der Ebene aus.

Darauf gestützt kann man die Bedingung leicht angeben, unter welcher ein Punkt p von zwei gegebenen Ebenen gleich weit absteht. Denn bezeichnet man mit den Symbolen A und A_1 die Ausdrücke:

$$(9) \quad \begin{aligned} A &\equiv x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta, \\ A_1 &\equiv x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - \delta_1, \end{aligned}$$

so sind $-A$ und $-A_1$ die senkrechten Abstände des durch die Coordinaten x, y, z gegebenen Punktes p von den beiden gegebenen Ebenen $A = 0$ und $A_1 = 0$. Mithin ist:

$$(10) \quad A - A_1 = 0$$

die gesuchte Bedingung. Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene. Daher beschreibt der Punkt p, dessen senkrechte Abstände von zwei gegebenen Ebenen gleich sind, wieder eine Ebene. Nun weiss man aber, dass der geometrische Ort des Punktes p die Ebene ist, welche den Neigungswinkel halbirt, den die gegebenen Ebenen mit einander bilden. Mithin ist die Gleichung (10) die Gleichung dieser Halbirungsebene.

Ebenso erhält man die Bedingung für den Punkt p, dessen senkrechte Abstände von den beiden gegebenen Ebenen gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind:

(11) . . . . $A + A_1 = 0$.

Dieses ist die Gleichung derjenigen Ebene, welche den zweiten von den gegebenen Ebenen gebildeten Neigungswinkel halbirt. Die beiden Ebenen (10) und (11) stehen auf einander senkrecht. Man braucht daher nur die Gleichungen zweier Ebenen auf diese Form zurückzuführen, um dadurch nachzuweisen, dass die Ebenen in einem vorliegenden Falle auf einander senkrecht stehen. Die gemachten Bemerkungen fassen wir aber als Satz also:

(12) . . . Wenn $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen zweier gegebenen Ebenen in der Normalform sind, so sind $A - A_1 = 0$ und $A + A_1 = 0$ die Gleichungen der Ebenen, welche die Neigungswinkel der gegebenen Ebenen halbiren.

Die Gleichungen der beiden Ebenen (10) und (11), welche durch die Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen $A = 0$ und $A_1 = 0$ hindurchgehen, sind zusammengesetzt aus diesen beiden Gleichungen. Diese Bemerkung lässt sich erweitern durch folgenden Satz:

(13) . . . Wenn zwischen den Gleichungen dreier Ebenen in irgend einer Form $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Identität obwaltet:

$$kU + k_1 U_1 + k_2 U_2 \equiv 0,$$

so schneiden sich die drei Ebenen in einer und derselben geraden Linie.

Denn auf Grund dieser Identität verschwindet U_2 für alle Werthe der Variabeln, welche den Gleichungen $U = 0$ und $U_1 = 0$ zugleich genügen, das ist für die Coordinaten aller Punkte in der Schnittlinie der beiden Ebenen $U = 0$ und $U_1 = 0$; welches eben beweiset, dass sämmtliche Punkte der Schnittlinie in der Ebene $U_2 = 0$ liegen.

Dehnt man diesen Satz noch weiter aus, so erhält man folgenden:

(14) . . . Wenn zwischen den Gleichungen von vier Ebenen in irgend welcher Form $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Identität stattfindet:

$$k\,U + k_1\,U_1 + k_2\,U_2 + k_3\,U_3 \equiv 0,$$

so schneiden sich die vier Ebenen in einem und demselben Punkte.

Für die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ werden diese Gleichungen zugleich erfüllt. Setzt man die Werthe dieser Coordinaten in die Identität, so sieht man, dass auch der Gleichung $U_3 = 0$ genügt wird, das heisst, der Schnittpunkt liegt in der Ebene $U_3 = 0$.

Die beiden letzten Sätze lassen sich auch umkehren, wie folgt:

(15) . . . Wenn $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen von drei Ebenen sind, welche sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, so lassen sich immer drei Constanten k der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$k\,U + k_1\,U_1 + k_2\,U_2 \equiv 0.$$

Es ist nämlich nach (13) $k\,U + k_1\,U_1 = 0$ die Gleichung einer Ebene, welche durch die Schnittlinie der Ebenen $U = 0$ und $U_1 = 0$ geht, mögen die Constanten k, k_1 irgend welche Werthe haben. Diese Constanten lassen sich nun so bestimmen, dass die genannte Ebene durch einen gegebenen Punkt der Ebene $U_2 = 0$ geht. Mit dieser Bestimmung fallen aber die Ebenen $k\,U + k_1\,U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ zusammen, was eben die identische Gleichung in (15) analytisch ausdrückt.

(16) . . . Wenn $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen von vier Ebenen sind, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden, so lassen sich immer vier Constanten k der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$k\,U + k_1\,U_1 + k_2\,U_2 + k_3\,U_3 \equiv 0.$$

Nach (14) ist $k U + k_1 U_1 + k_2 U_2 = 0$ mit den drei willkürlichen Constanten k die Gleichung einer Ebene, welche durch den Schnittpunkt der drei Ebenen $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ geht. Die willkürlichen Constanten lassen sich nun so bestimmen, dass die genannte Ebene durch zwei gegebene Punkte der Ebene $U_3 = 0$ geht. Dann fallen aber die Ebenen $k U + k_1 U_1 + k_2 U_2 = 0$ und $U_3 = 0$ in eine zusammen, wofür die identische Gleichung in (16) der analytische Ausdruck ist.

Die Sätze (13) und (14) bieten die Mittel, auf eine leichte Art nachzuweisen, dass gewisse Ebenen sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, oder dass gewisse Ebenen durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, wie dieses in den folgenden Betrachtungen hervortreten wird.

Es seien die Gleichungen von irgend drei Ebenen in der Normalform gegeben:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0.$$

Diese Ebenen zertheilen den Raum in 8 Fächer, von welchen wir das Fach ins Auge fassen wollen, in welchem der Coordinatenanfangspunkt liegt. Die Halbirungsebenen der Neigungswinkel von je zwei Ebenen in dem Fache stellen sich nach (12) also dar:

$$A_1 - A_2 = 0, \quad A_2 - A_0 = 0, \quad A_0 - A_1 = 0.$$

Da die Summe der linken Theile dieser Gleichungen identisch gleich 0 ist, so folgt hieraus nach (13), dass die sie darstellenden drei Ebenen sich in einer und derselben geraden Linie schneiden.

Um diesem Satze eine bequemere Fassung zu geben, beschreibe man eine Kugel um den Schnittpunkt P der gegebenen drei Ebenen als Mittelpunkt mit dem Radius $= 1$, und projicire die 6 Ebenen auf die Kugeloberfläche. Die drei gegebenen Ebenen, welche ein bestimmtes Fach bilden, schneiden dann auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck ab, und die Projectionen der drei anderen Ebenen auf die Kugeloberfläche, welche die Winkel des Dreiecks halbiren, haben nach dem Vorhergehenden die Eigenschaft, welche der folgende Satz angiebt:

Die grössten Kreise, welche die Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiren, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Wenn man annimmt, dass das sphärische Dreieck nur einen unendlich kleinen Theil der Kugeloberfläche umfasse, so kann man dasselbe als ein ebenes betrachten und den angegebenen Satz auf ein ebenes Dreieck übertragen.

Die Gleichungen der drei Ebenen, welche die äusseren Neigungswinkel des Faches halbiren, sind nach (12):

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A_2 + A_0 = 0, \quad A_0 + A_1 = 0.$$

Stellt man die linken Theile der beiden ersten Gleichungen zusammen mit dem linken Theile der dritten vorhin angegebenen Gleichung, so bemerkt man, dass:

$$(A_1 + A_2) - (A_2 + A_0) + (A_0 - A_1) \equiv 0,$$

woraus, wie vorhin, durch Uebertragung auf die Kugeloberfläche der Satz hervorgeht:

Die Halbirungslinien zweier äusseren und des dritten inneren Winkels eines sphärischen Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Dieser Satz ist von dem vorhergehenden eigentlich nicht verschieden. Denn betrachtet man das sphärische Dreieck, welches von den Verlängerungen zweier Seiten und der dritten Seite des gegebenen Dreiecks gebildet wird, so sind die Halbirungslinien der inneren Winkel dieses Dreiecks die Halbirungslinien zweier äusseren und eines inneren Winkels des gegebenen Dreiecks. Man kann ihn aber auch auf die Ebene übertragen, in welchem Falle er in der That eine neue Eigenschaft des Dreiecks erkennen lässt.

Betrachten wir endlich die durch die folgenden vier Gleichungen analytisch dargestellten Ebenen:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= 0, \\ -A_0 + A_1 + A_2 &= 0, \\ A_0 - A_1 + A_2 &= 0, \\ A_0 + A_1 - A_2 &= 0, \end{aligned}$$

so ist aus (14) ersichtlich, dass diese vier Ebenen sämmtlich durch den Punkt P gehen. Die erste von diesen Ebenen geht

nach (13) durch die Schnittlinie von $A_0 = 0$ und $A_1 + A_2 = 0$, ebenso durch die Schnittlinie von $A_1 = 0$ und $A_2 + A_0 = 0$ und die Schnittlinie von $A_2 = 0$ und $A_0 + A_1 = 0$. Es ist also eine bemerkenswerthe Eigenschaft dieser drei Schnittlinien, dass sie auf einer und derselben Ebene liegen. Ebenso liegen auf der zweiten Ebene die Schnittlinien der Ebenenpaare $A_0 = 0$ und $A_1 + A_2 = 0$, $A_1 = 0$ und $A_2 - A_0 = 0$, $A_2 = 0$ und $A_0 - A_1 = 0$. Die analogen Eigenschaften der beiden letzten Ebenen ergeben sich hiernach von selbst. Uebertragen, wie vorhin, auf die Kugeloberfläche, drücken diese Eigenschaften folgende Sätze aus:

Die Halbirungslinien der drei äusseren Winkel eines sphärischen Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in einem grössten Kreise liegen.

Die Halbirungslinien zweier inneren Winkel und des dritten äusseren Winkels eines sphärischen Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, die auf einem grössten Kreise liegen.

Diese Sätze kann man wieder auf das ebene Dreieck übertragen.

Sätze auf der Kugeloberfläche lassen sich leicht verdoppeln durch Anwendung eines Principes, welches wir das Princip der Kugel nennen wollen und welches sich stützt auf die Bemerkungen:

(17) . . . Die Pole der grössten Kreise auf der Kugeloberfläche, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden, liegen auf einem grössten Kreise, und die grössten Kreise, deren Pole auf einem und demselben grössten Kreise liegen, schneiden sich in einem Punkte. Der Bogen eines grössten Kreises, der die Pole zweier grössten Kreise verbindet, ist gleich dem Neigungswinkel der beiden grössten Kreise.

Denn beschreibt man zu einer auf der Kugeloberfläche gegebenen Figur die Polarfigur, welche entsteht, indem man

für jeden grössten Kreis der gegebenen Figur den Pol und für jeden Punkt der gegebenen Figur den grössten Kreis nimmt, dessen Pol der Punkt ist, so werden Eigenschaften der gegebenen Figur nach den gemachten Bemerkungen entsprechende Eigenschaften der Polarfigur zur Folge haben. Da aber die Polarfigur der Polarfigur wieder die gegebene Figur ist, so braucht man nur die Polarfigur als gegeben zu betrachten und die entsprechenden Eigenschaften an ihrer Polarfigur nachzuweisen, um den Beweis der Eigenschaften der gegebenen Polarfigur zu führen.

Nach diesem Uebertragungsprincip ergeben sich aus den angegebenen vier Sätzen auf der Kugeloberfläche folgende:

Die Halbirungspunkte der Complemente der Seiten eines sphärischen Dreiecks liegen auf einem grössten Kreise.

Die Halbirungspunkte zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks und der Halbirungspunkt des Complementes der dritten Seite liegen auf einem grössten Kreise.

Die Verbindungskreise der Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken schneiden sich in einem Punkte.

Die Verbindungskreise der Mitten der Complemente zweier Seiten des sphärischen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken und der Verbindungskreis der Mitte der dritten Seite mit der gegenüberliegenden Ecke schneiden sich in einem Punkte.

Von diesen vier Sätzen der Kugeloberfläche lässt sich nur der vorletzte in der oben angedeuteten Weise auf das ebene Dreieck übertragen.

Um die angestellten Betrachtungen zu erweitern, nehme man an, dass die Seitenflächen eines Tetraeders durch ihre Gleichungen in der Normalform gegeben seien:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Coordinatenanfangspunkt innerhalb des Tetraeders liege, sind dann die Gleichungen der, die Neigungswinkel der Seitenflächen halbirenden, Ebenen:

$$A_0 - A_1 = 0, \quad A_1 - A_2 = 0, \quad A_2 - A_3 = 0,$$
$$A_0 - A_2 = 0, \quad A_1 - A_3 = 0,$$
$$A_0 - A_3 = 0,$$

und die Gleichungen der, die äusseren Neigungswinkel halbirenden, Ebenen:

$$A_0 + A_1 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0, \quad A_2 + A_3 = 0,$$
$$A_0 + A_2 = 0, \quad A_1 + A_3 = 0,$$
$$A_0 + A_3 = 0,$$

Da aus den drei in der ersten Horizontalreihe aufgeführten Gleichungen die drei übrigen des ersten Systemes folgen, so hat man nach (14) den Satz:

Die 6 Halbirungsebenen der Neigungswinkel der Seitenflächen eines Tetraeders schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Es ist dieser Punkt der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.

Es schneiden sich aber auch folgende Ebenen in einem und demselben Punkte:

$$A_0 - A_1 = 0, \qquad A_0 + A_3 = 0,$$
$$A_1 - A_2 = 0, \qquad A_1 + A_3 = 0,$$
$$A_2 - A_0 = 0, \qquad A_2 + A_3 = 0,$$

woraus der Satz entspringt:

Die Halbirungsebenen der Neigungswinkel der drei Seitenflächen eines Tetraeders, welche eine Ecke bilden, und die Halbirungsebenen der drei gegenüberliegenden äusseren Neigungswinkel der Seitenflächen schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der äusseren Berührungskugel des Tetraeders.

Die 16 aufgeführten Ebenen bilden eine Figur im Raume, an der sich mit Hülfe der Sätze (13) und (14) auf dem angedeuteten Wege leicht noch andere Eigenschaften entdecken lassen.

Dritte Vorlesung.

Ebenen im Raume.

Wenn man durch die Schnittlinie zweier, durch ihre Gleichungen in der Normalform gegebenen, Ebenen 0, 1:

(1) . . . . $A_0 = 0, \quad A_1 = 0$

und durch einen Punkt P, dessen senkrechte Abstände von den beiden Ebenen sich verhalten wie die gegebenen Grössen $a_0 : a_1$, eine Ebene legt; so theilt jeder Punkt dieser Ebene mit dem Punkte P die Eigenschaft, dass die senkrechten Abstände sich wie die gegebenen Grössen verhalten.

Die Bedingung, dass die senkrechten Abstände $-A_0$ und $-A_1$ eines durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punktes von den gegebenen Ebenen 0, 1 sich verhalten, wie $a_0 : a_1$:

(2) . . . . $\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0$

wird hiernach die Gleichung jener durch die Schnittlinie gelegten Ebene sein.

Verändert man die Lage des Punktes P nach Belieben, so dreht sich die Ebene um die Schnittlinie, und erhält nach und nach alle Lagen, die eine durch jene Schnittlinie gelegte Ebene annehmen kann. Die Gleichung (2) stellt also jede beliebige Ebene 2 dar, die durch die Schnittlinie der Ebenen 0 und 1 hindurchgeht. Sie erhält die Gestalt:

(3) . . . . $A_0 - \lambda A_1 = 0,$

wenn man setzt $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$, und dieser Factor λ hat in der Voraussetzung, dass (20) und (21) die Neigungswinkel bedeuten, welche die Ebene 2 mit 0 und 1 bildet, die geometrische Bedeutung:

(4) . . . . $\lambda = \frac{\sin(20)}{\sin(21)}$.

Eine andere Ebene 3, die ebenfalls durch die Schnittlinie der Ebenen 0 und 1 hindurchgeht, hat zur Gleichung:

(5) . . . . $A_0 - \mu A_1 = 0$.

Das Verhältniss:

(6) . . . . $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(20)}{\sin(21)} : \frac{\sin(30)}{\sin(31)}$

zwischen den Sinus der Neigungswinkel heisst das anharmonische Verhältniss des Ebenenpaares 2 und 3 zu dem Ebenenpaare 0 und 1.

Allgemeiner stellen sich die Gleichungen von vier Ebenen, die sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, also dar:

(7) . . . $V_0 = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_0 - lV_1 = 0, \quad V_0 - mV_1 = 0,$

wenn man annimmt, dass die beiden ersten Gleichungen in der allgemeinen Form gegeben seien. Um das anharmonische Verhältniss zu finden, braucht man nur die beiden ersten Gleichungen auf die Normalform zurückzuführen, indem man setzt: $V_0 = \varrho_0 A_0$, $V_1 = \varrho_1 A_1$, wodurch die angegebenen vier Gleichungen übergehen in:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_0 - l\frac{\varrho_0}{\varrho_1}A_1 = 0, \quad A_0 - m\frac{\varrho_0}{\varrho_1}A_1 = 0$$

und woraus sich das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ ergiebt.

Noch allgemeiner ist die folgende Aufgabe:

(8) . . . Gegeben sind die Gleichungen von vier Ebenen, die sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, in der Form:

$U_0 - \lambda U_1 = 0$, $U_0 - \mu U_1 = 0$; $U_0 - \lambda_1 U_1 = 0$, $U_0 - \mu_1 U_1 = 0$,

das anharmonische Verhältniss des letzten Ebenenpaares zu dem ersten zu bestimmen.

Setzt man $U_0 - \lambda U_1 = V_0$, $U_0 - \mu U_1 = V_1$, und drückt U_0 und U_1 durch V_0 und V_1 aus, so stellen sich die gegebenen vier Gleichungen in der Form (7) dar, woraus das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ erhalten wird:

$$(9) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} : \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1}.$$

Das anharmonische Verhältniss wird zu einem harmonischen Verhältniss, wenn dasselbe den Werth -1 annimmt. Man erhält daher die Bedingung, welche zu erfüllen ist, wenn zwei Paare Ebenen, die durch dieselbe gerade Linie gehen, harmonische Ebenenpaare sein sollen, aus (6):

$$(10) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{\sin(20)}{\sin(21)} + \frac{\sin(30)}{\sin(31)} = 0,$$

oder, wenn die Gleichungen der Ebenen in der Form (7) gegeben sind, $m = -l$; weshalb sich die Gleichungen von zwei harmonischen Ebenenpaaren darstellen in der Form:

$$(11) \quad \dots \quad V_0 = 0, \; V_1 = 0; \; V_0 - l V_1 = 0, \; V_0 + l V_1 = 0.$$

Man erkennt hieraus, dass von zwei harmonischen Ebenenpaaren drei Ebenen, die durch dieselbe gerade Linie gehen, beliebig gewählt werden können, dass durch sie aber die vierte harmonische Ebene bestimmt ist. Nimmt man an, dass das erste Ebenenpaar gegeben sei, dass die dritte Ebene aber sich um die Schnittlinie der beiden ersten drehe, so kann man sich durch Discussion der Gleichung (10) für specielle Fälle leicht eine Vorstellung bilden von der Lage von zwei harmonischen Ebenenpaaren zu einander. Halbirt zum Beispiel die dritte Ebene den Neigungswinkel des gegebenen Ebenenpaares, so halbirt die vierte harmonische Ebene den anderen Winkel, den das gegebene Ebenenpaar einschliesst. Nähert sich die dritte Ebene einer der gegebenen Ebenen, so dass sie nahezu mit ihr zusammenfällt, so fällt auch die vierte harmonische Ebene nahezu mit ihr zusammen.

Sind die Gleichungen von zwei Ebenenpaaren, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, in der Form (8) gegeben, so erhält man die Bedingung, dass diese beiden Ebenenpaare harmonisch seien, indem man den Ausdruck (9) gleich -1 setzt; woraus die Bedingungsgleichung für zwei harmonische Ebenenpaare (8) hervorgeht:

$$(12) \quad \dots \quad \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Auch diese Gleichung liefert den Beweis, dass von zwei harmonischen Ebenenpaaren drei Ebenen die vierte unzweideutig bestimmen.

Da durch ein gegebenes Ebenenpaar das ihm zugeordnete harmonische Ebenenpaar nicht vollständig bestimmt ist, so werden zwei gegebene Ebenenpaare dazu erforderlich sein, was die Auflösung der folgenden Aufgabe bestätigen wird.

(13) . . . Dasjenige Ebenenpaar zu bestimmen, welches harmonisch ist zu zwei Paar Ebenen, die sich in derselben geraden Linie schneiden.

Es seien die Gleichungen der beiden gegebenen Ebenenpaare:

$$U_0 - \lambda_0 U_1 = 0, \qquad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0,$$
$$U_0 - \mu_0 U_1 = 0, \qquad U_0 - \mu_1 U_1 = 0,$$

und die Gleichung des gesuchten Ebenenpaares:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0,$$
$$U_0 - \mu U_1 = 0,$$

Dieses letztere ist harmonisch zu jedem der gegebenen Ebenenpaare unter folgenden Bedingungen:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Da in diese Gleichungen das Product $\lambda\mu$ und die Summe $\lambda + \mu$ der Unbekannten in linearer Weise eingehen, so kann man ihre Werthe unzweideutig berechnen, und daraus eine quadratische Gleichung bilden, deren Wurzeln die Unbekannten selbst sind.

Die angestellte Untersuchung lehrt, dass es immer ein bestimmtes Ebenenpaar giebt, welches harmonisch ist zu zwei gegebenen Ebenenpaaren, die durch dieselbe gerade Linie gehen. Dieses Ebenenpaar ist reell oder imaginär, je nachdem die Wurzeln der erwähnten quadratischen Gleichung reell oder imaginär sind.

Drei Paare Ebenen, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, bilden eine Involution, wenn ein viertes Ebenenpaar gefunden werden kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei Ebenenpaare.

Zwei gegebene Ebenenpaare, die durch dieselbe gerade Linie gehen, bestimmen, wie man gesehen hat, dasjenige Ebenenpaar, welches harmonisch ist zu jedem der gegebenen Ebenenpaare. Ein drittes zu dem letzteren harmonisches Ebe-

nenpaar wird also mit den beiden gegebenen eine Involution bilden. Da aber von diesem dritten Ebenenpaare eine Ebene beliebig durch jene gerade Linie gelegt werden kann, wodurch erst die andere bestimmt ist, so sieht man, dass von drei Ebenenpaaren der Involution fünf durch eine und dieselbe gerade Linie gehende Ebenen beliebig gewählt werden können, dass die sechste aber durch sie bestimmt ist.

Zwischen drei Paaren Ebenen, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, wird daher eine Bedingungsgleichung stattfinden müssen, wenn die Ebenenpaare eine Involution bilden sollen.

(14) . . . Es sind die Gleichungen von drei Paar Ebenen gegeben, welche durch dieselbe gerade Linie gehen:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = 0, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = 0, \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = 0,$$
$$V_0 - \mu_0 V_1 = 0, \quad V_0 - \mu_1 V_1 = 0, \quad V_0 - \mu_2 V_1 = 0,$$

die Bedingung anzugeben, unter welcher diese drei Ebenenpaare eine Involution bilden.

Bilden die angegebenen drei Ebenenpaare eine Involution, so hat man nach der Definition ein Ebenenpaar:

$$V_0 - \lambda V_1 = 0,$$
$$V_0 - \mu V_1 = 0,$$

welches zu jedem derselben harmonisch ist; was zutrifft unter den Bedingungen:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2\mu_2 = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\lambda\mu$ und $\lambda + \mu$, welche linear darin vorkommen, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung, der man folgende Form geben kann:

$$(15) \ldots (\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0.^{*)}$$

*) Die angegebene Form (15) der Bedingungsgleichung der Involution kann man durch Rechnung leicht verificiren. Es ist diese Art der Verification allerdings nur ein Nothbehelf. Wir werden deshalb nach der Vorbereitung weiterer analytischer Hülfsmittel durch die siebente Vor-

Wenn man in dieser Gleichung setzt $\lambda_0 = \mu_0 = \lambda$ und zugleich $\lambda_2 = \mu_2 = \mu$ setzt, so geht dieselbe in die Bedingungsgleichung für vier harmonische Ebenen über, welche man erhält, wenn man das anharmonische Verhältniss (9) gleich -1 setzt. Aus dieser Bemerkung fliesst der Satz:

Wenn von drei Ebenenpaaren der Involution das eine Ebenenpaar mit einer Ebene, ein zweites Ebenenpaar mit einer zweiten Ebene zusammenfallen, so ist das dritte Ebenenpaar der Involution harmonisch zu den beiden Ebenen.

Jede drei Paare Ebenen, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, lassen sich analytisch auch so darstellen:

$$A_0 = 0, \quad A_0 - \lambda_1 A_1 = 0, \quad A_0 - \lambda_2 A_1 = 0,$$
$$A_1 = 0, \quad A_0 - \mu_1 A_1 = 0, \quad A_0 - \mu_2 A_1 = 0,$$

indem man annimmt, $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ seien die Gleichungen des ersten Ebenenpaares in der Normalform. Die Bedingung, unter welcher diese drei Ebenenpaare eine Involution bilden, erhält man aus (15), wenn man setzt: $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = \infty$, nämlich:

$$\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 = 0.$$

Erinnert man sich aber der geometrischen Bedeutung der Grössen $\lambda_1 \mu_1$, $\lambda_2 \mu_2$, so kann man diese Gleichung auch so darstellen, wenn man mit 0, 1 das erste, mit 2, 3 das zweite und mit 4, 5 das dritte Ebenenpaar bezeichnet:

$$(16) \quad \ldots \quad \frac{\sin(20)}{\sin(21)} \cdot \frac{\sin(30)}{\sin(31)} - \frac{\sin(40)}{\sin(41)} \cdot \frac{\sin(50)}{\sin(51)} = 0.$$

Aus dieser Gleichung, welche man als Definition dreier, eine Involution bildenden, Ebenenpaare nehmen kann, gehen noch zwei andere Gleichungen hervor, die man erhält, wenn man das Ebenenpaar 0, 1 mit dem Ebenenpaare 2, 3, oder mit den Ebenenpaaren 4, 5 vertauscht. Da alle diese Gleichungen nichts anderes sind, als verschiedene Formen für eine und dieselbe Bedingung der Involution, so muss sich jede derselben direct aus einer von ihnen herleiten lassen.

---

lesung in der achten Vorlesung nicht allein jene Form der Bedingungsgleichung naturgemäss ableiten, sondern auch andere Formen, auf welche die Analytiker mit Recht Werth legen.

Um auf andere Formen für dieselbe Bedingung der Involution zu kommen, gehen wir auf die ursprüngliche Definition der Involution von drei Ebenenpaaren zurück. Nach derselben stellen die drei Gleichungenpaare:

$$(17) \quad \begin{array}{lll} V_0 - \lambda_0 V_1 = 0, & V_0 - \lambda_1 V_1 = 0, & V_0 - \lambda_2 V_1 = 0 \\ V_0 + \lambda_0 V_1 = 0, & V_0 + \lambda_1 V_1 = 0, & V_0 + \lambda_2 V_1 = 0 \end{array}$$

irgend drei Ebenenpaare 01, 23, 45 der Involution dar und $V_0 = 0$, $V_1 = 0$ dasjenige Ebenenpaar, welches harmonisch ist zu jedem der drei Paare.

An Stelle der zwei Symbole V_0, V_1, durch welche jene sechs Gleichungen ausgedrückt sind, wählen wir drei Symbole U_0, U_1, U_2, welche wir durch die Gleichungen definiren:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{U_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_0},$$
$$V_0 - \lambda_2 V_1 = \frac{U_2}{\lambda_0 - \lambda_1}$$

Alsdann hat man die identische Gleichung:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad U_0 + U_1 + U_2 \equiv 0$$

und jene sechs Gleichungen gehen, wenn man symmetrisch die zwei Symbole durch die drei Symbole ersetzt, über in:

$$(19) \quad \begin{array}{lll} U_0 = 0 & U_1 = 0 & U_2 = 0 \\ \frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0 & \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_0}{\mu_0} = 0 & \frac{U_0}{\mu_0} - \frac{U_1}{\mu_1} = 0 \end{array}$$

indem μ_0, μ_1, μ_2 die Ausdrücke bezeichnen:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu_0, \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 + \lambda_0} = \mu_1, \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \mu_2$$

Da die drei Grössen μ ebenso willkürlich sind, als die drei Grössen λ, aus welchen sie zusammengesetzt sind, so werden die Gleichungen (19) mit willkürlichen Factoren μ — unter Voraussetzung der identischen Gleichung (18), welche ausdrückt, dass die Ebenen $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, unter welcher Voraussetzung auch die anderen drei Ebenen durch dieselbe gerade Linie gehen — irgend drei Ebenenpaare der Involution darstellen.

Wenn wir endlich für die Gleichungen der Ebenen $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ ihre Normalformen einführen, indem wir setzen: $\varrho_0 U_0 = A_0$, $\varrho_1 U_1 = A_1$, $\varrho_2 U_2 = A_2$, so geht die identische Gleichung (18) über in:

$$(20) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{A_0}{\varrho_0} + \frac{A_1}{\varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho_2} \equiv 0$$

und die Gleichungen (19) der Ebenenpaare der Involution nehmen die Gestalt an:

$$(21) \quad \begin{array}{ccc} A_0 = 0, & A_1 = 0, & A_2 = 0 \\ \dfrac{A_1}{\mu_1 \varrho_1} - \dfrac{A_2}{\mu_2 \varrho_2} = 0, & \dfrac{A_2}{\mu_2 \varrho_2} - \dfrac{A_0}{\mu_0 \varrho_0} = 0, & \dfrac{A_0}{\mu_0 \varrho_0} - \dfrac{A_1}{\mu_1 \varrho_1} = 0 \end{array}$$

Erinnern wir uns nun nach (4) der geometrischen Bedeutung der Grössen:

$$\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_2 \varrho_2} = \frac{\sin(12)}{\sin(14)}, \quad \frac{\mu_2 \varrho_2}{\mu_0 \varrho_0} = \frac{\sin(34)}{\sin(30)}, \quad \frac{\mu_0 \varrho_0}{\mu_1 \varrho_1} = \frac{\sin(50)}{\sin(52)}$$

so erhalten wir durch Multiplication dieser Gleichungen:

$$(22) \quad \dots . \quad 1 = \frac{\sin(12) \cdot \sin(34) \cdot \sin(50)}{\sin(14) \cdot \sin(30) \cdot \sin(52)}$$

Diese Gleichung ist nur eine von (16) verschiedene Form der Bedingungsgleichung der Involution von drei Ebenenpaaren 01, 23, 45. Man erhält aus ihr noch drei andere aequivalente Formen, wenn man die Ebenen 0 und 1 oder die Ebenen 2 und 3 oder die Ebenen 4 und 5 mit einander vertauscht.

Wir haben demnach im Ganzen sieben verschiedene Formen für die Bedingungsgleichung der Involution von drei Ebenenpaaren mit Hilfe von geometrischen Betrachtungen abgeleitet. Es ist eine elegante Aufgabe der Algebra, alle diese Formen aus einer von ihnen direkt zu entwickeln*).

---

*) Hülfsmittel zur Lösung der genannten algebraischen Aufgabe findet man in der sechsten meiner Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. 1865, und hier in demjenigen Theile der achten Vorlesung, welcher die sieben Formen der Bedingungsgleichung der Involution behandelt.

Die angestellten Betrachtungen bieten ein Mittel, die am Ende der vorhergehenden Vorlesung entwickelten Sätze weiter auszudehnen. Denn nehmen wir an, dass:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0$$

die Gleichungen von irgend drei Ebenen seien in der Normalform, die sich in einem Punkte P schneiden, oder, was dasselbe ist, die drei von einem Punkte P ausgehende gerade Linien paarweise verbinden, so sind:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0, \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_0}{a_0} = 0, \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0$$

die Gleichungen von drei Ebenen, die eine vierte von P ausgehende gerade Linie immer mit einer der drei ersteren verbinden. Die angegebenen sechs Gleichungen stellen mithin drei Ebenenpaare dar, die vier beliebige von einem Punkte P ausgehende gerade Linien paarweise verbinden.

Die Uebereinstimmung dieser drei Gleichungenpaare, zwischen welchen aber im Allgemeinen nicht die identische Gleichung (20) obzuwalten braucht, mit (21), beweiset, dass drei Ebenenpaare der Involution ein specieller Fall sind von drei Ebenenpaaren, welche vier von einem und demselben Punkte ausgehende gerade Linien paarweise verbinden. Denn lässt man die vier von einem und demselben Punkte ausgehenden geraden Linien nahezu in eine zusammenfallen, so wird nahezu auch die Gleichung (20) erfüllt, das heisst, nahezu alle Bedingungen für die Ebenen der Involution.

Lässt man den Punkt P in das Unendliche fallen, so werden die vier von ihm ausgehenden geraden Linien vier beliebige paralle Linien, und zwischen den Sinus der Neigungswinkel der drei Ebenenpaare, welche diese Linien paarweise verbinden, findet die Gleichung (22) statt. Da diese Gleichung aber die Bedingung für Ebenen der Involution ist, so wird man Ebenen der Involution erhalten, wenn man durch eine gegebene gerade Linie sechs Ebenen legt, welche parallel sind mit drei Ebenenpaaren, welche irgend vier mit der gegebenen geraden Linie parallele Linien paarweise verbinden. Diese Bemerkung giebt ein Mittel an die Hand, zu fünf beliebig durch eine und dieselbe gerade Linie gehenden Ebenen die sechste Ebene der Involution zu bestimmen.

Durch jede der drei Schnittlinien der Ebenen A_0, A_1, A_2 gehen drei Ebenen der beschriebenen Raumfigur. Die vierten harmonischen Ebenen haben zu Gleichungen:

$$\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}=0, \quad \frac{A_2}{a_2}+\frac{A_0}{a_0}=0, \quad \frac{A_0}{a_0}+\frac{A_1}{a_1}=0.$$

Da nun zwischen den linken Theilen dieser und der vorhergehenden Gleichungen identische Relationen stattfinden wie:

$$\left(\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}\right)-\left(\frac{A_2}{a_2}+\frac{A_0}{a_0}\right)+\left(\frac{A_0}{a_0}-\frac{A_1}{a_1}\right)\equiv 0,$$

so hat man nach (13) der zweiten Vorlesung einen Satz.

Um diesem Satze eine elegante Fassung zu geben, projicire man die beschriebene Raumfigur von dem Punkte P als Mittelpunkt einer Kugel von dem Radius 1 auf die Oberfläche dieser Kugel. Nennt man dann harmonische grösste Kreise der Kugeloberfläche solche, deren Ebenen harmonische Ebenen sind, so begrenzen die Ebenen A_0, A_1, A_2 ein sphärisches Dreieck, von welchem der Satz erwiesen ist:

Wenn man von einem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche grösste Kreise zieht nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks und in jeder Ecke den vierten harmonischen grössten Kreis construirt, so schneiden sich zwei von den letzteren Kreisen in einem Punkte, durch welchen auch der durch die dritte Ecke des Dreiecks und den beliebigen Punkt gelegte grösste Kreise geht.

Aehnliche Betrachtungen angestellt an folgenden Gleichungen:

$$\frac{A_0}{a_0}+\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}=0,$$
$$-\frac{A_0}{a_0}+\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}=0,$$
$$\frac{A_0}{a_0}-\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}=0,$$
$$\frac{A_0}{a_0}+\frac{A_1}{a_1}-\frac{A_2}{a_2}=0,$$

wie in der vorhergehenden Vorlesung an den entsprechenden Gleichungen, in denen $a_0=a_1=a_2=1$, führen zu den Sätzen:

Wenn man von irgend einem Punkte der Kugeloberfläche nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks grösste Kreise zieht, und in jeder Ecke den vierten harmonischen grössten Kreis construirt, so schneiden letztere die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, die auf einem grössten Kreise liegen.

Wenn man von einem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks drei grösste Kreise zieht und in einer Ecke des Dreiecks den vierten harmonischen grössten Kreis construirt, so schneidet dieser die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in einem Punkte. Die von dem beliebigen Punkte nach den beiden anderen Ecken des Dreiecks gezogenen grössten Kreise schneiden die Gegenseiten des Dreiecks in zwei Punkten. Diese drei Schnittpunkte liegen auf einem grössten Kreise.

Dieser Satz ist besonders wichtig, weil er lehrt, auf lineare Weise, das heisst durch Zuziehung allein von grössten Kreisen zu drei von einem Punkte ausgehenden grössten Kreisen den vierten harmonischen zu finden; oder, was dasselbe ist, zu drei Ebenen, welche sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, die vierte harmonische Ebene ohne weitere Hülfe als von Ebenen zu construiren.

Es bleibt noch übrig, einen Satz zu entwickeln, der in linearer Weise zu fünf Ebenen, die sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, die sechste Ebene der Involution construiren lehrt. Diesem Zwecke dient die folgende Betrachtung.

Es seien die Gleichungen von irgend vier Ebenen, welche durch den Mittelpunkt P einer Kugel mit dem Radius 1 gehen:

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0.$$

Bezeichnen alsdann $u_0, u_1 \ldots$ die Werthe, welche die Ausdrücke $U_0, U_1 \ldots$ annehmen, wenn man in letztere für die variabeln Coordinaten die Coordinaten eines gegebenen

Punktes p setzt, den wir der Einfachheit wegen auf der Kugeloberfläche annehmen wollen, so sind:

$$\frac{U_0}{u_0} - \frac{U_3}{u_3} = 0, \quad \frac{U_1}{u_1} - \frac{U_3}{u_3} = 0, \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_3}{u_3} = 0$$

$$\frac{U_1}{u_1} - \frac{U_2}{u_2} = 0, \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_0}{u_0} = 0, \quad \frac{U_0}{u_0} - \frac{U_1}{u_1} = 0$$

die Gleichungen von drei Paar Ebenen, die sich in der geraden Linie Pp schneiden und zugleich durch die sechs Schnittlinien der oben bezeichneten vier Ebenen gehen.

Setzen wir, um die drei ersten Gleichungen durch Multiplication mit Factoren $\mu\varrho$ . . auf die Normalform zurückzuführen:

$$\frac{U_0}{u_0} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_0}{\mu_0\varrho_0}, \quad \frac{U_1}{u_1} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_1}{\mu_1\varrho_1}, \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_2}{\mu_2\varrho_2}$$

so gehen die angegebenen drei Gleichungenpaare über in:

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0$$

$$\frac{A_1}{\mu_1\varrho_1} - \frac{A_2}{\mu_2\varrho_2} = 0, \quad \frac{A_2}{\mu_2\varrho_2} - \frac{A_0}{\mu_0\varrho_0} = 0, \quad \frac{A_0}{\mu_0\varrho_0} - \frac{A_1}{\mu_1\varrho_1} = 0.$$

Da dieses aber gerade die Gleichungen (21) sind, aus welchen wir dort die Bedingungsgleichung (22) der Involution abgeleitet haben, so ist damit ein Satz bewiesen, der, auf die Kugeloberfläche übertragen, sich so ausdrücken lässt:

Wenn man einen beliebigen Punkt der Kugeloberfläche durch sechs grösste Kreise verbindet mit den sechs Schnittpunkten von irgend vier grössten Kreisen, so bilden die sechs Verbindungskreise eine Involution.

Es sind in diesem Satze unter grössten Kreisen der Involution nämlich solche Kreise zu verstehen, die in Ebenen liegen, welche eine Involution bilden. In dieser Voraussetzung bietet der Satz das Mittel, sowohl den sechsten grössten Kreis der Involution zu construiren, wenn fünf, von einem und demselben Punkte der Kugeloberfläche ausgehende, grösste Kreise gegeben sind, als auch die sechste Ebene der Involution zu construiren, wenn fünf, durch eine und dieselbe gerade Linie gehende, Ebenen gegeben sind.

Man nennt vier gerade Linien, welche in derselben Ebene von einem und demselben Punkte ausgehen, harmonische Linien, wenn zwischen den von ihnen eingeschlossenen Winkeln die Bedingungsgleichung (10) stattfindet. Es bilden ferner drei in derselben Ebene von einem Punkte ausgehende Linienpaare eine Involution von sechs geraden Linien, wenn zwischen den von ihnen eingeschlossenen Winkeln die Bedingungsgleichung (22) obwaltet. Dieses vorausgesetzt, kann man die angegebenen vier Sätze der Kugeloberfläche, indem man annimmt, dass die Figuren, von welchen sie handeln, nur einen unendlich kleinen Theil der Kugeloberfläche umfassen, auf die Ebene übertragen.

Harmonische Linien, von dem Mittelpunkte der Kugel ausgehend, auf die Kugeloberfläche projicirt, werden harmonische Punkte der Kugeloberfläche genannt. Zwischen den Bogen grösster Kreise, welche sie verbinden, findet die Bedingungsgleichung (10) statt, welche zugleich als Definition der harmonischen Punkte der Kugeloberfläche dient.

Ebenso schneiden sechs von dem Mittelpunkte der Kugel ausgehende gerade Linien der Involution die Kugeloberfläche in sechs Punkten der Involution auf der Kugeloberfläche. Zwischen den sie verbindenden Bogen grösster Kreise hat man die Bedingungsgleichung (22), welche ebenfalls als Definition der Punkte der Involution auf der Kugeloberfläche zu betrachten ist.

Gestützt auf diese Definitionen kann man mit Hülfe des in der vorhergehenden Vorlesung in (17) beschriebenen Principes der Kugel aus den angegebenen vier Sätzen folgende ableiten:

Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, durch einen grössten Kreis durchschneidet und zu diesen Schnittpunkten auf den Seiten des Dreiecks die vierten harmonischen Punkte construirt, so liegen je zwei von diesen harmonischen Punkten und der dritte Schnittpunkt auf einem grössten Kreise.

Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, durch einen gröss-

ten Kreis schneidet und auf jeder Seite des Dreiecks den vierten harmonischen Punkt construirt, so schneiden sich die drei grössten Kreise, welche die harmonischen Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbinden, in einem und demselben Punkte.

Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, durch einen grössten Kreis schneidet, und zwei von diesen Schnittpunkten durch grösste Kreise mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbindet, so schneiden sich diese in einem Punkte, durch welchen auch derjenige grösste Kreis hindurchgeht, welcher den, zu dem dritten Schnittpunkte harmonischen, Punkt mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet.

Drei Paare grösster Kreise, welche irgend vier Punkte der Kugeloberfläche paarweise verbinden, schneiden irgend einen anderen grössten Kreis in Punkten der Involution.

Die beiden letzten Sätze lehren, zu drei auf einem grössten Kreise der Kugeloberfläche gegebenen Punkten den vierten harmonischen, und zu fünf Punkten der Involution den sechsten in linearer Weise construiren.

Die Bedingsgleichung (10) für harmonische Punkte auf dem grössten Kreise der Kugeloberfläche geht über in:

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{(20)}{(21)} + \frac{(30)}{(31)} = 0,$$

wenn man annimmt, dass die harmonischen Punkte unendlich nahe an einander liegen, und die von ihnen begrenzten Stücke des grössten Kreises können als gerade Linien betrachtet werden.

Ebenso geht die Bedingungsgleichung (22) für Punkte der Involution auf einem grössten Kreise der Kugeloberfläche über in:

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 = \frac{(12)\cdot(34)\cdot(50)}{(14)\cdot(30)\cdot(52)},$$

wenn die Punkte der Involution unendlich nahe an einander liegen, und die von ihnen begrenzten Stücke des grössten Kreises werden gerade Linien.

Nimmt man daher die Gleichung (23) als Definition der harmonischen Punkte auf einer geraden Linie, und die Gleichung (24) als Definition der Punkte der Involution auf einer geraden Linie, so lassen sich durch das unendlich Kleine die angegebenen vier Sätze der Kugeloberfläche ohne Schwierigkeit auf die Ebene übertragen.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die in der vorhergehenden Vorlesung angedeuteten Betrachtungen des Tetraeders auf Grund der in dieser Vorlesung entwickelten Sätze sich leicht ausdehnen lassen, was zu interessanten Sätzen führt über ein Tetraeder in Verbindung mit einem beliebigen Punkte des Raumes.

Vierte Vorlesung.

Das Pascal'sche Sechseck und damit verwandte Figuren.

Die geschickte Anwendung der in den beiden vorhergehenden Vorlesungen eingeführten Symbole führt oft mit solch überraschender Einfachheit zu complicirten geometrischen Sätzen, dass es gerechtfertigt erscheint, diesem Gegenstande noch einen kurzen Abschnitt zu widmen.

Man weiss nach (15) der zweiten Vorlesung: wenn $U=0$, $U_1=0$, $U_2=0$ die Gleichungen von den Ebenen sind, welche sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, dass sich immer drei Constanten k der Art bestimmen lassen, dass man identisch hat:

$$kU+k_1U_1+k_2U_2\equiv 0.$$

Setzt man zur Abkürzung: $kU=r$, $k_1U_1=r'$, $k_2U_2=r''$, so stellen die Gleichungen:

$$r=0,\quad r'=0,\quad r''=0$$

irgend welche drei Ebenen dar, welche sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, unter der Bedingung:

$$(1) \quad r + r' + r'' \equiv 0.$$

Man kann daher sagen, dass die identische Gleichung (1) die Bedingung der angegebenen Figur ausdrücke, welche besteht aus drei Ebenen r, die sich in einer und derselben geraden Linie schneiden.

Um diese Figur weiter auszuführen, nehme man auf der gemeinsamen Schnittlinie der drei Ebenen r einen Punkt P als die Spitze einer dreiseitigen Pyramide A, deren drei Seitenkanten respective in den Ebenen r liegen. Die Bedingungen der so erweiterten Figur werden dann durch (1) und in gleicher Weise durch die identischen Gleichungen ausgedrückt:

$$(2) \quad a' - a'' \equiv r, \quad a'' - a \equiv r', \quad a - a' \equiv r'',$$

indem $a = 0$, $a' = 0$, $a'' = 0$ die Seitenflächen der dreiseitigen Pyramide A analytisch darstellen.

Beschreibt man noch zwei andere dreiseitige Pyramiden B und C mit der gemeinsamen Spitze P, deren Seitenkanten gleichfalls in den Ebenen r liegen, so drücken sich die Bedingungen des hinzugekommenen Theiles der Figur in gleicher Weise durch die identischen Gleichungen aus:

$$(3) \quad b' - b'' \equiv r, \quad b'' - b \equiv r', \quad b - b' \equiv r'',$$

$$(4) \quad c' - c'' \equiv r, \quad c'' - c \equiv r', \quad c - c' \equiv r''.$$

Die Bedingungen der beschriebenen sehr complicirten Raumfigur drücken sich hiernach durch die zehn aufgestellten Gleichungen auf ganz einfache Weise aus. Der Vortheil dieser Ausdrucksweise besteht aber darin, dass man aus den übersichtlichen identischen Gleichungen andere eben so einfache ableiten kann, deren geometrische Deutung Eigenschaften der Figur leicht erkennen lässt. Denn stellt man folgende Gleichungen:

$$b - c \equiv \varrho, \quad c - a \equiv \varrho', \quad a - b \equiv \varrho''$$

als Definition der Symbole ϱ, ϱ', ϱ'' auf, so sieht man, das aus den angegebenen zehn identischen Gleichungen folgende hervorgehen:

(5) . . . . $\varrho + \varrho' + \varrho'' \equiv 0.$

(6) . . $b - c \equiv \varrho, \quad c - a \equiv \varrho', \quad a - b \equiv \varrho''.$

(7) . . $b' - c' \equiv \varrho, \quad c' - a' \equiv \varrho', \quad a' - b' \equiv \varrho''.$

(8) . . $b'' - c'' \equiv \varrho, \quad c'' - a'' \equiv \varrho', \quad a'' - b'' \equiv \varrho''.$

Die letzten 9 Gleichungen beweisen, dass die Ebenen b und c, b' und c', b'' und c'' sich in drei geraden Linien schneiden, welche auf einer Ebene ϱ liegen u. s. w., und die Gleichung (5), dass die drei Ebenen ϱ durch eine und dieselbe gerade Linie gehen.

Alle Ebenen, von welchen die beschriebene Raumfigur handelt, gehen durch einen und denselben Punkt P. Die Projectionen derselben auf eine Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt P ist, werden daher grösste Kreise, und die bewiesenen Eigenschaften der Raumfigur lassen sich als Satz auf der Kugeloberfläche also ausdrücken:

W e n n die E c k e n von d r e i s p h ä r i s c h e n D r e i e c k e n a u f d r e i g r ö s s t e n K r e i s e n r d e r K u g e l o b e r f l ä c h e l i e g e n , w e l c h e s i c h in e i n e m u n d d e m s e l b e n P u n k t e s c h n e i d e n , so s c h n e i d e n s i c h d i e e n t s p r e c h e n d e n S e i t e n j e z w e i e r d i e s e r D r e i e c k e in d r e i P u n k t e n , w e l c h e a u f e i n e m g r ö s s t e n K r e i s e ϱ l i e g e n , u n d d i e d r e i g r ö s s t e n K r e i s e ϱ s c h n e i d e n s i c h w i e d e r in e i n e m u n d d e m s e l b e n P u n k t e d e r K u g e l o b e r f l ä c h e.

Das Princip der Kugel lässt aus diesem Satze folgenden hervorgehen:

W e n n die S e i t e n v o n d r e i s p h ä r i s c h e n D r e i e c k e n d u r c h d r e i P u n k t e r d e r K u g e l o b e r f l ä c h e g e h e n , w e l c h e a u f e i n e m g r ö s s t e n K r e i s e l i e g e n , so s c h n e i d e n s i c h d i e d r e i g r ö s s t e n K r e i s e , w e l c h e d i e e n t s p r e c h e n d e n E c k e n v o n j e z w e i D r e i e c k e n v e r b i n d e n , in e i n e m u n d d e m s e l b e n P u n k t e ϱ, u n d d i e d r e i P u n k t e ϱ l i e g e n a u f e i n e m g r ö s s t e n K r e i s e.

Dass diese Sätze der Kugeloberfläche ebenfalls für die Ebenen gelten, wenn man für die grössten Kreise gerade Linien in der Ebene nimmt, bedarf nach dem Vorhergehenden kaum der Erwähnung.

Um eine zweite Anwendung zu machen von den Symbolen der Ebenen, betrachten wir irgend eine sechsseitige Pyramide, deren gegenüberliegende Seitenflächen sich paarweise in drei geraden Linien schneiden, welche in einer und derselben Ebene liegen. Eine solche sechsseitige Pyramide nennen wir eine Pascal'sche Pyramide nach dem Entdecker der Eigenschaften derselben, und die Ebene, in welcher sich die gegenüberliegenden Seitenflächen derselben paarweise schneiden, nennen wir die, der Pyramide zugehörige, Pascal'sche Ebene.

Die Bedingungen der Pascal'schen Pyramide drücken sich nun einfach durch folgende drei identische Gleichungen aus:

$$(9) \quad \begin{aligned} a - a' &\equiv r'', \\ b - b' &\equiv r'', \\ c - c' &\equiv r'', \end{aligned}$$

indem $a = 0$ und $a' = 0$, $b = 0$ und $b' = 0$, $c = 0$ und $c' = 0$ die Gleichungen der gegenüberliegenden Seitenflächen der Pyramide vorstellen, und $r'' = 0$ die Gleichung der ihr zugehörigen Pascal'schen Ebene.

Alle diese Ebenen, sowie diejenigen, welche in der Folge betrachtet werden, gehen durch die Spitze P der Pyramide.

Definirt man nun die Ausdrücke a'', b'', c'' durch die identischen Gleichungen:

$$(10) \quad a'' + b + c' \equiv 0, \quad a + b' + c'' \equiv 0, \quad a' + b'' + c \equiv 0,$$

so hat man mit Zuziehung der identischen Gleichungen (9) auch folgende:

$$(11) \quad a'' + b' + c \equiv 0, \quad a + b'' + c' \equiv 0, \quad a' + b + c'' \equiv 0,$$

Diese sechs indentischen Gleichungen beweisen, dass $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 0$ die Gleichungen von drei Ebenen sind, welche die gegenüberliegenden Seitenkanten der sechsseitigen Pyramide paarweise verbinden. Wir bezeichnen sie mit dem Namen der Diagonalebenen der sechsseitigen Pyramide.

Definirt man ferner zwei andere Ausdrücke r und r' durch die identischen Gleichungen:

$$a' - a'' \equiv r, \quad a'' - a \equiv r',$$

so hat man mit Berücksichtigung von (10) und (11):

$$(12) \ldots\ldots \quad \begin{array}{ll} a' - a'' \equiv r, & a'' - a \equiv r', \\ b' - b'' \equiv r, & b'' - b \equiv r', \\ c' - c'' \equiv r, & c'' - c \equiv r', \end{array}$$

und aus (9) und (12) folgt:

$$(13) \ldots\ldots\ldots \quad r + r' + r'' \equiv 0.$$

Noch andere identische Gleichungen von derselben Form erhält man, wenn man drei Ausdrücke ϱ, ϱ', ϱ'' durch die identischen Gleichungen definirt:

$$b - c \equiv \varrho, \quad c - a \equiv \varrho', \quad a - b \equiv \varrho'',$$

aus welchen man mit Zuziehung der vorhergehenden Gleichungen leicht folgende ableiten kann:

$$(14) \ldots \quad \begin{array}{lll} b - c \equiv \varrho, & c - a \equiv \varrho', & a - b \equiv \varrho'', \\ b' - c' \equiv \varrho, & c' - a' \equiv \varrho', & a' - b' \equiv \varrho'', \\ b'' - c'' \equiv \varrho, & c'' - a'' \equiv \varrho', & a'' - b'' \equiv \varrho'', \end{array}$$

$$(15) \ldots\ldots\ldots \quad \varrho + \varrho' + \varrho'' \equiv 0.$$

Die fünf Systeme Gleichungen (12) und (14) sind conform mit dem Systeme (9), den Bedingungen der Pascal'schen Pyramide. Sie sind also die Ausdrücke für andere Pascal'sche Pyramiden, die in der betrachteten ihren Ursprung haben, und die Gleichungen (13) und (15) liefern den Beweis, dass die diesen Pyramiden zugehörigen Pascal'schen Ebenen sich zu dreien combinirt in einer und derselben geraden Linie schneiden.

Forscht man aber diesem Ursprunge näher nach, so ersieht man aus (12), dass die geraden Seitenflächen und die drei Diagonalebenen der gegebenen Pascal'schen Pyramide eine zweite, und dass die ungeraden Seitenflächen und die drei Diagonalebenen der gegebenen Pascal'schen Pyramide eine dritte Pascal'sche Pyramide bilden, beide mit denselben Seitenkanten als die gegebene Pyramide. Die diesen drei Pyramiden entsprechenden Pascal'schen Ebenen r schneiden sich nach (13) in einer und derselben, durch die gemeinsame Spitze der Pyramiden gehenden geraden Linie.

Die sechs Seitenflächen und die drei Diagonalebenen der gegebenen Pascal'schen Pyramide bilden aber, zu sechs combinirt, nach (14) noch drei andere Pascal'sche Pyramiden mit denselben Seitenkanten als die gegebene. Die ihnen entsprechenden Pascal'schen Ebenen ϱ schneiden sich nach (15) in einer durch die gemeinsame Spitze der Pyramiden gehenden geraden Linie.

Nennt man, um die bewiesenen Sätze durch Projection von der gemeinsamen Spitze P der Pyramiden als Mittelpunkt auf die Kugeloberfläche zu übertragen, ein sphärisches Sechseck auf der Kugeloberfläche *ein Pascal'sches Sechseck auf der Kugeloberfläche*, wenn die gegenüberliegenden Seiten desselben sich paarweise in drei Punkten schneiden, die auf einem grössten Kreise, *dem Pascal'schen Kreise des Sechsecks*, liegen, so kann man denselben folgenden Ausdruck geben:

Wenn auf der Kugeloberfläche irgend ein Pascal'sches Sechseck gegeben ist, so bestimmen die sechs Seiten und die drei Diagonalen desselben, als Seiten zu sechs combinirt, zwei Gruppen von drei Pascal'schen Sechsecken, deren Ecken mit den Ecken des gegebenen Sechsecks zusammenfallen. Die Sechsecke der ersten Gruppe sind das gegebene, ein zweites Sechseck, gebildet aus den geraden Seiten des gegebenen und den drei Diagonalen, und ein drittes Sechseck, gebildet aus den ungeraden Seiten und den Diagonalen. Die Pascal'schen Kreise r *der ersten Gruppe schneiden sich in einem und demselben Punkte; ebenso schneiden sich die Pascal'schen Kreise* ϱ *der zweiten Gruppe wieder in einem Punkte.*

Aus der Uebereinstimmung der in dieser Untersuchung aufgestellten Gleichungen mit den Gleichungen, welche die vorhergehende darbot, ist man zu schliessen berechtigt, dass beide Untersuchungen in ihrem Verlauf dieselben Raumfiguren ergeben. Den einzigen Unterschied führen die Gleichungen (10) und (11) herbei, welche in der ersten Untersuchnng fehlen. Da diese Gleichungen aber eine Beschränkung aus-

drücken, so sieht man, dass die Figur der letzten Untersuchung einen specielleren Charakter hat.

Um schliesslich noch eine Eigenthümlichkeit der beschriebenen specielleren Raumfigur vorzuführen, definiren wir drei Ausdrücke R, und drei Ausdrücke P durch folgende identische Gleichungen:

$$(16) \quad \begin{aligned} r'' - r' &\equiv R, & \varrho'' - \varrho' &\equiv P, \\ r - r'' &\equiv R', & \varrho - \varrho'' &\equiv P', \\ r' - r &\equiv R'', & \varrho' - \varrho &\equiv P'', \end{aligned}$$

woraus mit Hülfe der vorhergehenden identischen Gleichungen folgende hervorgehen:

$$(17) \quad \begin{aligned} R + P &\equiv 3a, & R' + P &\equiv 3a', & R'' + P &\equiv 3a'', \\ R + P' &\equiv 3b, & R' + P' &\equiv 3b', & R'' + P' &\equiv 3b'', \\ R + P'' &\equiv 3c, & R' + P'' &\equiv 3c', & R'' + P'' &\equiv 3c'', \end{aligned}$$

Vergegenwärtigt man sich die Gleichungen (13), (15) und (16), so sieht man, dass $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0$ die den drei Ebenen r, r', r'' in ihren möglichen Combinationen entsprechenden vierten harmonischen Ebenen, und dass $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$ die den drei Ebenen ϱ, ϱ', ϱ'' entsprechenden vierten harmonischen Ebenen darstellen, während die Gleichungen (17) den Beweis liefern, dass die drei vierten harmonischen Ebenen der ersten Gruppe die drei vierten harmonischen Ebenen der zweiten Gruppe in neun geraden Linien schneiden, welche auf den Seitenflächen und den Diagonalebenen der betrachteten Pascal'schen Pyramide liegen.

Man hat daher im Anschluss an den oben angegebenen Satz folgenden:

Die drei vierten harmonischen grössten Kreise zu den drei Pascal'schen Kreisen r schneiden die drei vierten harmonischen grössten Kreise zu den drei Pascal'schen Kreisen ϱ in neun Punkten, welche auf den Seiten und den Diagonalen des gegebenen Pascal'schen Sechsecks liegen.

Das Princip der Kugel angewendet auf diese Sätze führt auf neue Sätze. Alle diese Säte kann man auch auf die Ebene

übertragen, indem man gerade Linien in der Ebene für die grössten Kreise der Kugeloberfläche nimmt.

An die vorhergehende Betrachtung der Pascal'schen sechs seitigen Pyramide, deren Bedingungen die Gleichungen (9) ausdrücken, schliessen wir noch folgende zusätzliche Bemerkungen an:

Wie eine zwischen den variabeln Coordinaten lineare Gleichung eine Ebene definirt, so definirt irgend eine gegebene Gleichung zwischen denselben Coordinaten eine Oberfläche. Ist die gegebene Gleichung von der zweiten Ordnung, das heisst, besteht sie aus Gliedern, die nur die Quadrate der Coordinaten und die Producte derselben in der zweiten Dimension neben Gliedern der ersten und nullten Ordnung enthalten, so nennt man die Oberfläche zweiter Ordnung. Hiernach ist zum Beispiel:

$$(18) \ldots \quad r''r'' - r''(a + b + c) + bc + ca + ab = 0$$

die Gleichung einer bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung. Diese Gleichung geht, wenn man a gleich 0 setzt, mit Rücksicht auf (9) über in:

$$(r'' - b)(r'' - c) = b'c' = 0.$$

Die Gleichung (18) wird also erfüllt, wenn man $a = 0$ und zugleich $b' = 0$ setzt, das heisst, für die Coordinaten aller Punkte, welche in der Schnittlinie der beiden Ebenen $a = 0$ und $b' = 0$ liegen, die sich in einer Seitenkante der gegebenen Pascal'schen sechsseitigen Pyramide schneiden. Diese Seitenkante liegt daher in der durch die Gleichung (18) gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung.

Da sich dieselben Bemerkungen bei jeder Seitenkante jener Pascal'schen Pyramide wiederholen, so liegen sämmtliche sechs Seitenkanten der gegebenen Pascal'schen Pyramide in der durch die Gleichung (18) gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung.

Eine charakteristische Eigenschaft dieser Oberfläche lässt sich leicht aus ihrer Gleichung (18) erkennen, wenn man die Spitze P der Pyramide in den Coordinatenanfangspunkt legt. Denn in dieser Voraussetzung werden die Ausdrücke a, b, c, r'', woraus die Gleichung (18) zusammengesetzt ist, lineare homogene Ausdrücke von der Form:

$$ux + vy + wz,$$

welche sämmtlich den Factor k erhalten, im Uebrigen aber ungeändert bleiben, wenn man für x, y, z respective setzt kx, ky, kz. Durch diese Aenderung erhält der linke Theil der Gleichung (18) den Factor k^2, bleibt aber im Uebrigen ungeändert.

Wenn daher x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der Oberfläche (18) sind, so sind auch kx, ky, kz die Coordinaten eines Punktes derselben Oberfläche. Geometrisch bedeutet dieses, dass jede gerade Linie, welche irgend einen Punkt der Oberfläche mit dem Coordinatenanfangspunkt P verbindet, in ihrer ganzen Ausdehnung in der Oberfläche liegt. Die Oberfläche (18) besteht daher aus lauter geraden Linien, die in dem Punkte P zusammenstossen. Eine solche Oberfläche nennt man einen Kegel, und da derselbe durch eine Gleichung zweiter Ordnung (18) definirt wird, einen Kegel zweiter Ordnung. Man hat daher den Satz „dass die sechs Seitenkanten einer Pascal'schen Pyramide in einem Kegel zweiter Ordnung liegen.“

Um die wahre Bedeutung dieses Satzes zu erkennen, bedarf es zweier Voraussetzungen, die freilich erst in den späteren Untersuchungen bewiesen werden; erstens, dass ein Kegel zweiter Ordnung durch fünf Kanten desselben unzweideutig bestimmt ist, zweitens, dass eine durch zwei Kanten des Kegels zweiter Ordnung gelegte Ebene den Kegel nur in diesen zwei Kanten schneidet. [Wir weisen auf die vierzehnte Vorlesung hin, in welcher die Voraussetzungen bewiesen werden.] Denn macht man diese Voraussetzungen, so sieht man, dass der angegebene Satz alle Kanten des Kegels zweiter Ordnung linear construiren lehrt, wenn fünf Kanten des Kegels gegeben sind; woraus wiederum folgt „dass alle einem Kegel zweiter Ordnung einbeschriebenen sechsseitigen Pyramiden Pascal'sche Pyramiden sind.“

Definirt man einen sphärischen Kegelschnitt als die Schnittcurve eines Kegels zweiter Ordnung und einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels liegt, so überträgt sich der bewiesene Satz auf die Kugeloberfläche wie folgt:

Die Ecken eines Pascal'schen Sechsecks auf der Kugeloberfläche liegen auf einem sphärischen Kegelschnitt.

Der aus den angegebenen Voraussetzungen hervorgegangene Satz, auf die Kugeloberfläche übertragen, lässt sich also wiedergeben:

Jedes, einem sphärischen Kegelschnitt einbeschriebene, sphärische Sechseck ist ein Pascal'sches Sechseck.

Das Princip der Kugel, angewendet auf diese beiden Sätze, veranlasst die Frage, welches die Curve sei, die von den grössten Kreisen der Kugeloberfläche berührt wird, deren Pole einen sphärischen Kegelschnitt beschreiben. Es lässt sich nachweisen, wozu die späteren Untersuchungen [in der vierzehnten Vorlesung über Kegel zweiter Ordnung] die Mittel bieten, dass diese grössten Kreise einen sphärischen Kegelschnitt berühren. Setzt man dieses als bewiesen voraus, so ergeben sich durch das Princip der Kugel aus den zuletzt angegebenen Sätzen neue, die sich, gleich wie jene, auch auf die Ebene übertragen lassen.

Die Geometrie auf der Kugeloberfläche, aus welcher in den vorstehenden Vorlesungen nur einzelne Sätze entwickelt worden sind, ist allgemeiner, als die Geometrie in der Ebene. Denn wenn man Punkte und gerade Linien in der Ebene als Punkte und grösste Kreise auf der Kugeloberfläche auffasst, so hat nicht jeder Satz in der Ebene, ohne Beschränkung auf das unendlich Kleine, seinen entsprechenden Satz auf der Kugeloberfläche. Dagegen hat jeder Satz auf der Kugeloberfläche seine Gültigkeit in der Ebene, wenn die Figur, von welcher der Satz handelt, sich auf einen unendlich kleinen Theil der Kugeloberfläche beschränken lässt.

Die Zahl der Sätze auf der Kugeloberfläche ist viel grösser, als die Zahl der Sätze in der Ebene. Ueberdies hat die Geometrie auf der Kugeloberfläche den Vortheil zweier Uebertragungsprincipe zur Verdoppelung der Sätze, des genannten Principes der Kugel und des Principes der Reciprocität, während die Geometrie in der Ebene nur von letzterem Gebrauch machen kann. Es lassen sich daher die Sätze auf der Kugeloberfläche in einen viel innigeren Zusammenhang bringen, als die entsprechenden Sätze in der Ebene.

In der Ebene lassen sich zum Beispiel eine Ellipse und ihre Brennpunkte nicht als entsprechende Figur einer Hyperbel und ihrer Asymp-

toten auffassen. Darum kennt man in der Ebene auch keine Verbindung zwischen den Sätzen von den Brennpunkten einer Ellipse und den Sätzen von den Asymptoten einer Hyperbel. Auf der Kugeloberfläche ist das Princip der Kugel das Band zwischen diesen Sätzen. Denn den Brennpunkten eines sphärischen Kegelschnittes entsprechen nach dem erwähnten Principe die Asymptoten eines anderen sphärischen Kegelschnittes, wie umgekehrt.

Die Geometrie auf der Kugeloberfläche kennt keinen Unterschied zwischen sphärischer Ellipse, Hyperbel und Parabel. Ein sphärischer Kegelschnitt hat sowohl Brennpunkte wie Asymptoten. Es lassen sich darum die Eigenschaften der drei Gattungen Kegelschnitte in der Ebene, die dort getrennt behandelt werden, auf der Kugeloberfläche an einem und demselben sphärischen Kegelschnitt studiren.

Zur Einleitung in das Studium der sphärischen Kegelschnitte sei folgende Aufgabe empfohlen:

„Den geometrischen Ort eines Punktes c auf der Kugeloberfläche „zu bestimmen, zwischen dessen sphärischen Abständen ca und cb von „zwei gegebenen Punkten a und b auf der Kugeloberfläche die Relation „besteht:

$$ca + cb = 2A.$$

Es wird sich zeigen, dass der Radius der Kugel, welcher durch den variabeln Punkt c geht, einen Kegel zweiter Ordnung beschreibt. Nach der Definition ist dann der gesuchte geometrische Ort des Punktes c ein sphärischer Kegelschnitt.

Diese aus den Brennpunkten a und b der Ellipse in der Ebene auf der Kugeloberfläche nachgebildete Curve ist zugleich der Hyperbel nachgebildet. Denn ist a' der Punkt auf der Kugeloberfläche, in welchem der, durch a gehende, Durchmesser die Kugeloberfläche zum zweiten Male trifft, so ist:

$$ca + ca' = 2R,$$

und wenn man die erste Relation von dieser abzieht:

$$ca' - cb = 2R - 2A,$$

welches beweiset, dass, wenn man für die Brennpunkte a und b die Brennpunkte a' und b nimmt, für diese letzteren die Differenz der Brennstrahlen eine constante Grösse ist, wie für die ersteren die Summe.

Construirt man zu der in Rede stehenden Figur die Polarfigur, nämlich denjenigen sphärischen Kegelschnitt, welcher nach der letzten Bemerkung in der Vorlesung von dem grössten Kreise berührt wird, dessen Pol der variable Punkt c ist und die grössten Kreise, deren Pole a und b sind, so sind diese beiden grössten Kreise die Asymptoten des construirten Kegelschnittes. Denn man hat mit der Lösung der vorgelegten Aufgabe und durch das Princip der Kugel zugleich den Beweis des Satzes:

„Wenn eine Seite eines sphärischen Dreiecks sich so bewegt, dass „der Inhalt des Dreiecks unverändert bleibt, so berührt die bewegliche

„Seite in allen ihren Lagen einen und denselben sphärischen Kegelschnitt, „dessen Asymptoten die beiden anderen Seiten des Dreiecks sind.

Wenn wir noch weiter vorgreifen wollen in die spätere Vorlesung über die Kreisschnitte der Oberfläche zweiter Ordnung, so können wir hier schon die Frage erheben „nach dem Zusammenhange der Asymptoten eines sphärischen Kegelschnittes und den Kreisschnitten des Kegels zweiter Ordnung, welcher auf der Kugeloberfläche den sphärischen Kegelschnitt begrenzt.“ Man wird finden, dass die Asymptotenebenen den Kegel in Kreisen schneiden.

Fünfte Vorlesung.

Der Punkt im Raume und Punkte im Raume.

Wie die Lage eines Punktes im Raume durch drei Grössen, durch seine Coordinaten, unzweideutig bestimmt ist, so kann man auch die Lage einer beliebigen Ebene im Raume durch drei Grössen ausdrücken. Ist nämlich die Gleichung irgend einer Ebene:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ux + vy + wz + 1 = 0$$

gegeben, auf welche Form sich die Gleichung jeder Ebene zurückführen lässt, so sieht man, dass die Lage dieser Ebene allein abhängt von den Werthen der Constanten u, v, w, welche linear in die Gleichung eingehen. Weil diese Constanten die Lage der Ebene im Raume unzweideutig bestimmen, so werden wir sie die Coordinaten der Ebenen nennen, oder Ebenencoordinaten, zum Unterschiede von den einen Punkt im Raume bestimmenden Punktcoordinaten.

Sind demnach die Coordinaten u, v, w einer Ebene gegeben, so kann man aus ihnen die Gleichung (1) zusammensetzen, die Gleichung der Ebene, durch welche die Ebene selbst im Raume bestimmt ist. Die Coordinaten der Ebene, geometrisch gedeutet, sind also die negativen reciproken Abschnitte, welche die Ebene auf den Coordinatenaxen macht.

Fragt man nach den Eigenschaften aller Punkte, deren Coordinaten irgend einer gegebenen linearen Gleichung der

Coordinaten genügen, so weiss man, dass alle diese Punkte auf einer und derselben Ebene liegen. Die analoge Frage im Falle von Ebenencoordinaten stellt sich so: welche Eigenschaften haben alle Ebenen, deren Coordinaten irgend einer gegebenen linearen Gleichung genügen:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad Au + Bv + Cw + D = 0.$$

Es wird sich zeigen, dass alle diese Ebenen durch einen und denselben, durch die Gleichung (2) bestimmten, Punkt hindurchgehen. Wenn nun im ersten Falle die gegebene, in Punktcoordinaten lineare, Gleichung die Gleichung der Ebene genannt wurde, so verlangt die Analogie in dem anderen Falle, dass man die gegebene, in Ebenencoordinaten lineare, Gleichung (2) die Gleichung des Punktes nenne, durch welchen alle jene Ebenen gehen. Von dieser Benennungsweise soll in dem Folgenden ein vielfältiger Gebrauch gemacht werden.

Es bleibt aber noch nachzuweisen übrig, dass alle Ebenen (1), deren Coordinaten der Gleichung (2) genügen, wirklich durch einen und denselben Punkt hindurchgehen. Um diesen Nachweis zu führen, kann man bemerken, dass in der Gleichung (2) die Coordinaten u, v beliebige Werthe annehmen, dass aber der Werth von w durch sie bestimmt ist. Setzt man daher diesen Werth von w in die Gleichung (1), so erhält man die Gleichung aller Ebenen (1), deren Coordinaten der Gleichung (2) genügen, in der Form:

$$(3) \quad \ldots \quad (Cx - Az)u + (Cy - Bz)v + (C - Dz) = 0$$

mit den beiden ganz willkürlichen Constanten u, v. Diese Gleichung ist aber zusammengesetzt aus den Gleichungen der drei Ebenen:

$$(4) \quad Cx - Az = 0, \quad Cy - Bz = 0, \quad C - Dz = 0.$$

Die Ebene (3) geht also durch den Schnittpunkt P der drei Ebenen (4), dessen Coordinaten sind:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D}.$$

Dieser Punkt P ist es also, welchen die Gleichung (2) analytisch darstellt. Es ergiebt sich hieraus zugleich eine

Regel für die Bestimmung der Coordinaten eines, durch seine Gleichung gegebenen, Punktes, wie für die Bildung der Punktgleichung, wenn die Coordinaten des Punktes gegeben sind. Denn bringt man die gegebene Punktgleichung (2) durch Multiplication mit einem constanten Factor auf die Form, in welcher das constante Glied gleich der Einheit ist, so sind die Coefficienten von u, v, w die Coordinaten des Punktes. Multiplicirt man dagegen die gegebenen Coordinaten eines Punktes respective mit den Ebenencoordinaten und setzt die Summe dieser Producte zur Einheit addirt gleich 0, so hat man die Gleichung des Punktes.

Da die Gleichung (1), welche durch die Gleichung (2) auf die Form (3) gebracht wurde, in dieser Form mit den beiden willkürlichen Constanten u, v nach (14) der zweiten Vorlesung alle möglichen Ebenen darstellt, welche durch den Punkt P gehen, so sieht man, dass die variabeln Ebenencoordinaten u, v, w, welche nur der Gleichung (2), der Gleichung des Punktes P, genügen, allen möglichen Ebenen zugehören, welche durch diesen Punkt gehen.

Die Form (2) der Gleichung des Punktes wird fortan die allgemeine Form der Gleichung des Punktes genannt werden zum Unterschiede von der Form:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad au + bv + cw + 1 = 0,$$

die wir die Normalform der Gleichung des Punktes nennen.

(7) . . . Wenn die Coordinaten U, V, W einer Ebene und die Gleichung eines Punktes im Raume in der Normalform gegeben sind, den senkrechten Abstand Δ des Punktes von der Ebene zu bestimmen.

Diese Aufgabe lässt sich leicht zurückführen auf die Aufgabe (7) in der zweiten Vorlesung. Denn es ist die Gleichung der Ebene in der Normalform:

$$\frac{Ux + Vy + Wz + 1}{-\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)}} = 0,$$

und wenn (6) die gegebene Gleichung des Punktes ist, so hat man die Coordinaten desselben

$$a, \quad b, \quad c.$$

Daraus ergiebt sich nun nach der in (8) der zweiten Vorlesung angegebenen Regel der senkrechte Abstand des Punktes von der Ebene:

$$\varDelta = \frac{Ua + Vb + Wc + 1}{\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)}}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (6), so kann man folgende Regel aufstellen:

(8) . . . Wenn man den linken Theil einer in der Normalform gegebenen Gleichung eines Punktes dividirt durch $\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}$, so drückt der Quotient den senkrechten Abstand des Punktes von einer, durch ihre Coordinaten u, v, w gegebenen, Ebene aus.

Setzt man:

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} A &\equiv au + bv + cw + 1, \\ A_1 &\equiv a_1u + b_1v + c_1w + 1, \end{aligned}$$

so wird nach (8):

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A - A_1 = 0$$

die Bedingung ausdrücken, dass eine, durch ihre Coordinaten u, v, w bestimmte, Ebene von den, durch ihre Gleichungen $A = 0$ und $A_1 = 0$ gegebenen, Punkten gleich weit abstehe. Da (10) aber die Gleichung eines Punktes ist, so werden alle Ebenen, deren senkrechte Abstände von den beiden Punkten gleich sind, durch jenen Punkt hindurchgehen. Es ist dieses bekanntlich derjenige Punkt, der auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte in dem Unendlichen liegt.

Sind die senkrechten Abstände der Ebene von den beiden gegebenen Punkten gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen, so hat man dafür die Bedingung:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A + A_1 = 0,$$

welches die Gleichung desjenigen Punktes ist, der die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte $A = 0$ und $A_1 = 0$ halbirt. Denn alle Ebenen, welche durch diesen Punkt gehen, haben von den beiden gegebenen Punkten gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte, Abstände. Man hat daher den Satz:

(12) . . . Wenn $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen zweier gegebenen Punkte in der Normalform sind, so sind $A - A_1 = 0$ und $A + A_1 = 0$ die Gleichungen zweier anderen Punkte auf der Verbindungslinie der ersteren, von welchen der eine in dem Unendlichen liegt, der andere die Verbindungslinie halbirt.

Die Bemerkung, dass die Gleichungen (10) und (11) der Punkte, welche auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte $A = 0$ und $A_1 = 0$ liegen, aus den Gleichungen der gegebenen Punkte zusammengesetzt sind, lässt sich erweitern wie folgt:

(13) . . . Wenn zwischen den Gleichungen dreier Punkte $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Identität statt hat:

$$k\,U + k_1 U_1 + k_2 U_2 \equiv 0\,,$$

so liegen die drei Punkte auf einer und derselben geraden Linie.

Die Coordinaten aller Ebenen, welche durch die beiden Punkte $U = 0$ und $U_1 = 0$ hindurchgehen, genügen diesen beiden Gleichungen zugleich; sie genügen also auch, mit Rücksicht auf die Identität, der Gleichung $U_2 = 0$. Da aber alle Ebenen, deren Coordinaten der Gleichung $U_2 = 0$ genügen, durch einen und denselben Punkt $U_2 = 0$ gehen, und die vorhin erwähnten Ebenen, welche durch die Verbindungslinie der beiden Punkte gehen, mit zu diesen Ebenen gehören, so muss der Punkt $U_2 = 0$ auf der Verbindungslinie der beiden Punkte liegen.

(14) . . . Wenn zwischen den Gleichungen von vier Punkten $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Identität statt hat:

$$k\,U + k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 \equiv 0\,,$$

so liegen die vier Punkte auf einer und derselben Ebene.

Man hat nur eine Ebene, deren Coordinaten den drei Punktgleichungen $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ zu gleicher Zeit genügen, nämlich die Ebene, welche durch die drei Punkte

hindurchgeht. Die Coordinaten dieser Ebene genügen, mit Rücksicht auf die Identität, der Gleichung $U_3 = 0$. Da nun alle Ebenen, welche der Gleichung $U_3 = 0$ genügen, durch einen und denselben Punkt $U_3 = 0$ gehen, so muss auch die angegebene Ebene durch diesen Punkt gehen.

Die beiden letzten Sätze (13) und (14), welche analog gebildet sind, wie die Sätze (13) und (14) der zweiten Vorlesung, kann man umkehren, wie jene:

(15) . . . Wenn $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen von drei Punkten sind, welche auf einer und derselben geraden Linie liegen, so lassen sich immer drei Constanten k der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$k\,U + k_1 U_1 + k_2 U_2 \equiv 0$$

(16) . . . Wenn $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen von vier Punkten sind, welche auf einer und derselben Ebene liegen, so lassen sich immer vier Constanten k der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$k\,U + k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 \equiv 0 \,.$$

Die Beweise dieser umgekehrten Sätze (15) und (16) ergeben sich aus den Beweisen der analogen Sätze (15) und (16) in der zweiten Vorlesung; man braucht nur die Bedeutung der Punkte und Ebenen zu vertauschen.

Betrachtet man irgend ein ebenes Dreieck, dessen Ecken durch die Punktgleichungen in der Normalform gegeben seien:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0,$$

so hat man nach dem Vorhergehenden für die Halbirungspunkte der Seiten die Gleichungen:

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A_2 + A_0 = 0, \quad A_0 + A_1 = 0.$$

und die Gleichung:

$$A_0 + A_1 + A_2 = 0$$

stellt einen Punkt im Raume dar, der nach (14) in der Ebene des Dreiecks und nach (13) auf jeder der drei geraden Linien

liegt, welche die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks verbinden mit den gegenüberliegenden Ecken. Es ist dieses ein Satz, dem man folgenden Ausdruck geben kann:

Wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines ebenen Dreiecks verbindet durch drei gerade Linien mit den ihnen gegenüberliegenden Ecken, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in einem und demselben Punkte, dem Schwerpunkte des Dreiecks.

Drücken die Punktgleichungen in der Normalform:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

die Ecken eines Tetraeders aus, so hat man für die Halbirungspunkte der Kanten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 0, & A_2 + A_3 &= 0, \\ A_0 + A_2 &= 0, & A_3 + A_1 &= 0, \\ A_0 + A_3 &= 0, & A_1 + A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Zwei von diesen, in derselben Horizontallinie stehenden, Gleichungen zu einander addirt geben dreimal die Gleichung:

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$

wodurch nach (13) der Beweis des Satzes geführt ist:

Wenn man die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders durch drei gerade Linien verbindet, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in einem und demselben Punkte.

Man kann aber auch die zuletzt angeführte Gleichung vier Mal zertheilen in die Summe von drei Gliedern + einem Gliede, woraus nach (13) der Satz entspringt:

Wenn man den Schwerpunkt einer jeden Seitenfläche eines Tetraeders durch eine gerade Linie verbindet mit der gegenüberliegenden Ecke des Tetraeders, so schneiden sich die vier Verbindungslinien in einem und demselben Punkte.

Die Analogie, welche die vorstehenden Untersuchungen mit der zweiten Vorlesung bieten, erstreckt sich auch auf die folgenden Untersuchungen und die dritte Vorlesung.

Sucht man die Bedingung, welche die Coordinaten u, v, w einer Ebene zu erfüllen haben, wenn die senkrechten Abstände der Ebene von zwei durch ihre Gleichungen in der Normalform gegebenen Punkten:

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 = 0\,, \quad A_1 = 0$$

sich verhalten sollen wie zwei gegebene Grössen $a_0 : a_1$, so findet man:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0.$$

Es ist dieses die Gleichung eines Punktes. Durch ihn gehen also alle Ebenen, deren senkrechte Abstände die genannte Eigenschaft haben. Die geometrische Anschauung lehrt, dass dieser Punkt auf der durch die beiden Punkte gehenden geraden Linie liegt. Daher stellt die Gleichung (18) einen Punkt dieser geraden Linie dar. Die geometrische Anschauung lehrt ferner, dass die Abstände dieses Punktes selbst von den beiden gegebenen Punkten sich ebenfalls verhalten wie die gegebenen beiden Grössen $a_0 : a_1$. Daraus kann man wiederum schliessen, dass die Gleichung (18) jeden beliebigen Punkt auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte ausdrückt. Denn, welches auch der auf der Verbindungslinie angenommene Punkt sei, es wird (18) die Gleichung dieses Punktes sein, wenn a_0 und a_1 die Abstände desselben von den gegebenen beiden Punkten ausdrücken.

Bringt man, indem man $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$ setzt, (18) auf die Form:

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 - \lambda A_1 = 0$$

und bezeichnet die gegebenen beiden Punkte mit 0 und 1, und einen dritten beliebigen Punkt auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte mit 2, so wird dieses die Gleichung des Punktes 2 sein, in der Voraussetzung, dass λ den Werth hat:

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lambda = \frac{(20)}{(21)}.$$

Dieser Punkt liegt zwischen den gegebenen beiden Punkten, oder ausserhalb derselben, je nachdem λ negativ oder positiv ist.

Ein anderer Punkt 3, der ebenfalls auf der geraden Linie liegt, hat zur Gleichung:

(21) . . . . $A_0 - \mu A_1 = 0.$

Das Verhältniss:

(22) . . . . $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(20)}{(21)} : \frac{(30)}{(31)}$

nennt man das anharmonische Verhältniss des Punktepaares 2 und 3 zu dem Punktepaare 0 und 1.

Das anharmonische Verhältniss wird wieder $\frac{l}{m}$, wenn die Gleichungen der beiden Punktepaare in der Form gegeben sind:

(23) . . $V_0 = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_0 - lV_1 = 0, \quad V_0 - mV_1 = 0,$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die allgemeinen Formen V_0, V_1 der Gleichungen des ersten Punktepaares durch ihre Normalformen ausdrückt.

(24) . . . Gegeben sind die Gleichungen von vier Punkten, die auf einer und derselben geraden Linie liegen:

$U_0 - \lambda U_1 = 0, \; U_0 - \mu U_1 = 0; \; U_0 - \lambda_1 U_1 = 0, \; U_0 - \mu_1 U_1 = 0,$

das anharmonische Verhältniss des letzten Punktepaares zu dem ersten zu bestimmen.

Durch Zurückführung der gegebenen Formen auf die Formen (23) erhält man aus den letzteren das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ gleich:

(25) . . . . $\frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} : \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1}.$

Das anharmonische Verhältniss wird zu einem harmonischen Verhältniss, wenn ersteres den Werth -1 annimmt, und die beiden Punktepaare werden unter dieser Bedingung harmonische Punktepaare. Man erhält daher aus (22) die Bedingung für harmonische Punktepaare auf einer geraden Linie:

(26) . . . . $\frac{(20)}{(21)} + \frac{(30)}{(31)} = 0.$

Es ist dieses dieselbe Gleichung, welche wir am Schlusse der dritten Vorlesung unter (23) als Definition von harmonischen Punkten auf einer geraden Linie aufgestellt haben zum Zwecke der Uebertragung von Sätzen der Kugeloberfläche auf die Ebene. Ihre Discussion für specielle Fälle giebt eine Vorstellung von der Lage von zwei harmonischen Punktepaaren zu einander. So kann man zum Beispiel bemerken, wenn von einem Punktepaare, welches harmonisch ist zu einem gegebenen Punktepaar, der eine Punkt zwischen die gegebenen fällt, dass der andere ausserhalb liegt; wenn der eine Punkt die von dem gegebenen Punktepaar begrenzte gerade Linie halbirt, dass der andere in das Unendliche fällt, und umgekehrt; endlich, wenn der eine Punkt einem der gegebenen unendlich nahe rückt, dass der andere ihm ebenfalls unendlich nahe rückt, so dass im Grenzfalle drei Punkte zusammenfallen.

Da für harmonische Punkte $\frac{l}{m} = -1$ ist, so stellen sich die Gleichungen zweier harmonischen Punktepaare also dar:

$$(27) \ldots \quad V_0 = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_0 - l\,V_1 = 0, \quad V_0 + l\,V_1 = 0.$$

Sind allgemeiner die Gleichungen von zwei Punktepaaren auf derselben geraden Linie gegeben in der Form (24), so erhält man die Bedingung, dass sie harmonisch zu einander seien, wenn man (25) gleich -1 setzt, woraus die Bedingungsgleichung hervorgeht:

$$(28) \ldots \quad \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Wenn daher von zwei harmonischen Punktepaaren drei Punkte gegeben sind, so ist der vierte harmonische Punkt unzweideutig bestimmt. Aber es ist nicht das Punktepaar bestimmt, welches harmonisch ist zu einem gegebenen Punktepaar. Deshalb kann man sich die Aufgabe stellen:

(29) . . . D a s j e n i g e P u n k t e p a a r z u b e s t i m m e n, w e l c h e s h a r m o n i s c h i s t z u j e d e m v o n z w e i g e g e b e n e n P u n k t e p a a r e n, d i e a u f d e r s e l b e n g e r a d e n L i n i e l i e g e n.

Sind:
$$U_0 - \lambda_0 U_1 = 0, \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0,$$
$$U_0 - \mu_0 U_1 = 0, \quad U_0 - \mu_1 U_1 = 0,$$

die Gleichungen der gegebenen Punktepaare, und

$$U_0 - \lambda U_1 = 0,$$
$$U_0 - \mu U_1 = 0$$

die Gleichungen des gesuchten Punktepaares, so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Hiernach sind die Unbekannten λ und μ als die Wurzeln einer leicht zu bildenden quadratischen Gleichung bestimmt. Man wird daher nur ein einziges Punktepaar finden, welches zu den gegebenen beiden harmonisch ist.

Drei Punktepaare auf derselben geraden Linie bilden eine Involution, wenn ein viertes Punktepaar gefunden werden kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei Punktepaare.

Zwei gegebene Punktepaare auf derselben geraden Linie bestimmen nach dem Vorhergehenden dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist zu jedem der gegebenen Punktepaare. Ein drittes zu dem bestimmten Punktepaare harmonisches Punktepaar wird also mit den gegebenen beiden eine Involution bilden. Da aber von diesem dritten Punktepaare ein Punkt auf der geraden Linie beliebig gewählt werden kann, so sieht man, dass von drei Punktepaaren der Involution fünf Punkte auf der geraden Linie beliebig angenommen werden können, dass der sechste Punkt der Involution aber durch sie bestimmt ist. Es findet daher zwischen drei Punktepaaren auf derselben geraden Linie nur eine Bedingungsgleichung statt, wenn sie eine Involution bilden.

(30) . . . Es sind die Gleichungen von drei Punktepaaren auf derselben geraden Linie gegeben:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = 0, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = 0, \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = 0,$$
$$V_0 - \mu_0 V_1 = 0, \quad V_0 - \mu_1 V_1 = 0, \quad V_0 - \mu_2 V_1 = 0;$$

die Bedingung anzugeben, unter welcher diese drei Punktepaare eine Involution bilden.

Stellt man die drei Bedingungsgleichungen in der Form (28) auf, die erfüllt werden müssen, wenn sich ein Punktepaar:

$$V_0 - \lambda V_1 = 0 ,$$
$$V_0 - \mu V_1 = 0$$

bestimmen lassen soll, welches harmonisch ist zu jedem der gegebenen Punktepaare, und eliminirt aus diesen drei Bedingungsgleichungen $\lambda + \mu$ und $\lambda \mu$, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(31) \quad (\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung wird, wenn man setzt $\lambda_0 = \mu_0 = \lambda$ und zugleich $\lambda_2 = \mu_2 = \mu$, die Bedingungsgleichung für vier harmonische Punkte, die man erhält, wenn man den Ausdruck (25) gleich -1 setzt. Deshalb hat man den Satz:

Wenn von drei Punktepaaren der Involution das eine Punktepaar mit einem Punkte, ein zweites Punktepaar mit einem zweiten Punkte zusammenfallen, so ist das dritte Punktepaar der Involution harmonisch zu den beiden Punkten.

Diese Gleichung (31) geht ferner über in:

$$\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 = 0,$$

wenn die Gleichungen der drei Punktepaare in der Form gegeben sind:

$$A_0 = 0, \quad A_0 - \lambda_1 A_1 = 0, \quad A_0 - \lambda_2 A_1 = 0,$$
$$A_1 = 0, \quad A_0 - \mu_1 A_1 = 0, \quad A_0 - \mu_2 A_1 = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf (20) die Relation hervorgeht:

$$(32) \quad \ldots\ldots \quad \frac{(20)}{(21)} \cdot \frac{(30)}{(31)} - \frac{(40)}{(41)} \cdot \frac{(50)}{(51)} = 0,$$

wenn A_0 und A_1 die Normalformen bedeuten für das erste Punktepaar 0 und 1, und man das zweite Punktepaar mit 2 und 3, und das dritte Punktepaar mit 4 und 5 bezeichnet.

Die abgeleitete Gleichung (32) kann als Definition dienen für drei Punktepaare der Involution, gleich wie die beiden anderen Gleichungen, welche aus ihr durch Vertauschung von je zwei Punkten der drei Punktepaare hervorgehen.

Es lassen sich aber auch die Gleichungen von drei Punktepaaren der Involution immer auf die Form zurückführen:

$$(33)\quad \begin{array}{lll} V_0 - \lambda_0 V_1 = 0, & V_0 - \lambda_1 V_1 = 0, & V_0 - \lambda_2 V_1 = 0, \\ V_0 + \lambda_0 V_1 = 0, & V_0 + \lambda_1 V_1 = 0, & V_0 + \lambda_2 V_1 = 0, \end{array}$$

indem man das Punktepaar zum Grunde legt $V_0 = 0$ und $V_1 = 0$, welches harmonisch ist zu jedem Punktepaare der Involution.

Setzt man, um diese Gleichungen symmetrisch durch drei Symbole auszudrücken:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{U_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_0},$$
$$V_0 - \lambda_2 V_1 = \frac{U_2}{\lambda_0 - \lambda_1},$$

so hat man die identische Gleichung:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots \quad U_0 + U_1 + U_2 \equiv 0,$$

und die Gleichungen der drei Punktepaare der Involution (33) stellen sich also dar:

$$(35)\quad \begin{array}{lll} U_0 = 0, & U_1 = 0, & U_2 = 0, \\ \frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0, & \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_0}{\mu_0} = 0, & \frac{U_0}{\mu_0} - \frac{U_1}{\mu_1} = 0, \end{array}$$

indem die Grössen μ_0, μ_1, μ_2:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu_0, \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 + \lambda_0} = \mu_1, \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \mu_2,$$

ebenso willkürlich bleiben als die Grössen λ_0, λ_1, λ_2.

Man braucht daher nur die Gleichungen von drei Punktepaaren auf die Form (35) zurückzuführen und die identische Gleichung (34) nachzuweisen, um den Beweis zu führen, dass die drei Punktepaare eine Involution bilden.

Neben den Relationen (32) zwischen den Entfernungen der Punkte der Involution von einander hat man noch andere, die sich aus den Gleichungen (34) und (35) leicht ableiten lassen, wenn man die Symbole U_0, U_1, U_2 durch ihre Normalformen:

$$\varrho_0 U_0 = A_0, \quad \varrho_1 U_1 = A_1, \quad \varrho_2 U_2 = A_2$$

ersetzt, wodurch (34) und (35) übergehen in:

$$(36) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{A_0}{\varrho_0} + \frac{A_1}{\varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho_2} \equiv 0,$$

$$(37)\quad \begin{array}{ccc} A_0 = 0\,, & A_1 = 0\,, & A_2 = 0\,, \\ \dfrac{A_1}{\varrho_1\mu_1} - \dfrac{A_2}{\varrho_2\mu_2} = 0\,, & \dfrac{A_2}{\varrho_2\mu_2} - \dfrac{A_0}{\varrho_0\mu_0} = 0\,, & \dfrac{A_0}{\varrho_0\mu_0} - \dfrac{A_1}{\varrho_1\mu_1} = 0. \end{array}$$

Denn es ist nach (20) für die vorliegenden drei Punktepaare 01, 23, 45:

$$\frac{\varrho_1\mu_1}{\varrho_2\mu_2} = \frac{(12)}{(14)}\,, \quad \frac{\varrho_2\mu_2}{\varrho_0\mu_0} = \frac{(34)}{(30)}\,, \quad \frac{\varrho_0\mu_0}{\varrho_1\mu_1} = \frac{(50)}{(52)}$$

woraus man durch Multiplication sämmtlicher Gleichungen erhält:

$$1 = \frac{(12)\cdot(34)\cdot(50)}{(14)\cdot(30)\cdot(52)}$$

Es ist dieses dieselbe Gleichung, auf welche am Ende der dritten Vorlesung (24) die Betrachtung des unendlich Kleinen zurückführte. Aus ihr erhält man endlich durch Vertauschung von 0 mit 1, oder 2 mit 3, oder 4 mit 5 noch drei andere Relationen neben der Gleichung (38), die alle dieselbe Bedingung, aber in anderer Form, ausdrücken und sich daher von einander ableiten lassen müssen.

Es wird dieses genügen, um die doppelte Deutung von linearen symbolischen Ausdrücken und Gleichungen von drei Variabeln anschaulich zu machen. Die weitere Durchführung derselben in dem letzten Theile der dritten Vorlesung unterliegt keinen Schwierigkeiten. Wir übergehen sie aber, weil sie nur zu solchen geometrischen Sätzen führt, die bereits durch das Princip der Kugel allgemeiner auf der Kugeloberfläche nachgewiesen wurden und ihre Geltung in der Ebene durch die erwähnte Betrachtung des unendlich Kleinen erlangen.

Wir schliessen diese Vorlesung mit einer Betrachtung des Tetraeders. Es seien:

$$A_0 = 0\,, \quad A_1 = 0\,, \quad A_2 = 0\,, \quad A_3 = 0$$

die Gleichungen der Ecken desselben. Irgend drei beliebige Punkte auf den von der Ecke $A_0 = 0$ ausgehenden Kanten stellen sich unter der Form dar:

$$\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0\,, \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_2}{a_2} = 0\,, \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_3}{a_3} = 0.$$

Die Differenzen dieser Gleichungen ergeben:

$$\frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0, \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0, \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0,$$

als Gleichungen von drei Punkten auf den drei anderen Kanten des Tetraeders, die zugleich auf der durch die drei ersten Punkte gelegten Ebene liegen. Man kann also sagen, dass man durch die sechs Kanten des Tetraeders eine beliebige Ebene gelegt habe. Die Schnittpunkte derselben mit den sechs Kanten drücken jene sechs Gleichungen aus. Die Gleichungen der vierten harmonischen Punkte auf den Kanten des Tetraeders sind dann respective:

$$\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} = 0, \quad \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_2}{a_2} = 0, \quad \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_3}{a_3} = 0,$$

$$\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0, \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0, \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0.$$

Durch Addition je zweier von diesen Gleichungen, die unter einander stehen, erhält man die Gleichung:

$$\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0.$$

Darauf beruht aber nach (13) der Beweis des Satzes:

Wenn man die Kanten oder die Verlängerungen der Kanten eines Tetraeders durch eine Ebene schneidet, und auf jeder Kante zu dem Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt construirt, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die vierten harmonischen Punkte auf den gegenüberliegenden Kanten paarweise verbinden, in einem und demselben Punkte.

Rückt die, die Kanten des Tetraeders schneidende, Ebene in das Unendliche, so werden die vierten harmonischen Punkte die Mittelpunkte der Kanten.

Sechste Vorlesung.

Homogene Coordinaten. Gerade Linien im Raume.

Um die Vortheile der Symmetrie in der analytischen Geometrie zu haben, drückt man den Ort eines Punktes im Raume durch vier Coordinaten x, y, z, p aus. Man versteht darunter vier Grössen, deren Verhältnisse $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ die gebräuchlichen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes darstellen. Wir werden fortan jene vier Grössen die Coordinaten, oder die homogenen Coordinaten des Punktes nennen, die angegebenen Verhältnisse dagegen die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes.

Dieses vorausgesetzt, werden die Coordinaten eines Punktes die Lage desselben im Raume zwar unzweideutig bestimmen, aber nicht umgekehrt sind die Coordinaten eines Punktes vollständig bestimmt, wenn die Lage des Punktes im Raume gegeben ist.

Ein Punkt im Raume hat hiernach unendlich viele Werthe seiner Coordinaten, deren Verhältnisse zu einander aber bestimmt sind. Umgekehrt werden mehrere Systeme von Coordinaten einen und denselben Punkt bestimmen, wenn ihre Verhältnisse dieselben sind.

Die Gleichung einer Ebene durch rechtwinklige Coordinaten ausgedrückt:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

wird durch Einführung der homogenen Coordinaten, indem man $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ respective für x, y, z setzt, und mit p multiplicirt, zu einer homogenen Gleichung derselben Ebene:

$$Ax + By + Cz + Dp = 0.$$

Ist daher $U = 0$ die Gleichung einer Ebene in rechtwinkligen Coordinaten und man setzt $pU = W$, so wird $W = 0$ die homogene Gleichung derselben Ebene, wenn man für die Producte xp, yp, zp, p die neuen Coordinaten x, y, z, p setzt.

Umgekehrt, ist $W = 0$ die homogene Gleichung einer Ebene, so braucht man in ihr nur $p = 1$ zu setzen, um die Gleichung derselben Ebene in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten.

Man ersieht hieraus, dass sich mit den homogenen Formen der Gleichungen von Ebenen ebenso operiren lässt, als mit den allgemeinen Formen.

Sind zum Beispiel die Gleichungen von zwei Ebenenpaaren, die sich in derselben geraden Linie schneiden, in der allgemeinen Form gegeben:

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \quad U_0 - \lambda U_1 = 0, \quad U_0 - \mu U_1 = 0,$$

so stellen sich die Gleichungen dieser Ebenen, indem man setzt $p U_0 = W_0$, $p U_1 = W_1$ in der homogenen Form ebenso dar:

$$W_0 = 0, \quad W_1 = 0, \quad W_0 - \lambda W_1 = 0, \quad W_0 - \mu W_1 = 0,$$

Diese homogenen Gleichungen gehen wieder in die vorhergehenden über, wenn man $p = 1$ setzt. Das anharmonische Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ des zweiten Ebenenpaares zu dem ersten lässt sich im ersten wie in dem zweiten Falle aus den Gleichungen ablesen.

Gleichzeitig drückt man die Lage einer Ebene im Raume durch vier Ebenencoordinaten, homogene Ebenencoordinaten, u, v, w, r aus. Man versteht darunter die Coefficienten der Variabeln in der homogenen Gleichung der Ebene. Die gebräuchlichen rechtwinkligen Ebenencoordinaten sind demnach die durch die Lage der Ebene im Raume gegebenen Verhältnisse $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{w}{r}$.

Die Gleichung eines Punktes:

$$Au + Bv + Cw + D = 0$$

wird durch Einführung der homogenen Ebenencoordinaten, indem man $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{w}{r}$ für u, v, w setzt und mit r multiplicirt, zu einer homogenen Gleichung desselben Punktes:

$$Au + Bv + Cw + Dr = 0.$$

Ist daher $U = 0$ die Gleichung eines Punktes in rechtwinkligen Ebenencoordinaten, und man setzt $r U = R$, so

wird $R = 0$ die homogene Gleichung desselben Punktes, wenn man für ru, rv, rw, r respective setzt u, v, w, r.

Ist umgekehrt $R = 0$ die homogene Gleichung eines Punktes, so geht dieselbe, wenn man in ihr $r = 1$ setzt, in die durch rechtwinklige Ebenencoordinaten ausgedrückte Gleichung desselben Punktes über.

Für diese homogenen Formen der Punktgleichungen gelten daher dieselben Entwickelungen, die wir für die allgemeinen Formen der Punktgleichungen gegeben haben.

Sind zum Beispiel die homogenen Gleichungen von zwei Punktepaaren auf derselben geraden Linie gegeben in der Form:

$$R_0 = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_0 - \lambda R_1 = 0, \quad R_0 - \mu R_1 = 0,$$

so hat man das anharmonische Verhältniss des zweiten Punktepaares zu dem ersten gleich $\frac{\lambda}{\mu}$.

Der Vortheil der homogenen Coordinaten tritt erst in den folgenden Betrachtungen zu Tage.

Wenn man mit R_k den Ausdruk bezeichnet:

$$R_k = x_k u + y_k v + z_k w + p_k r,$$

so sind:

$$R_0 = 0, \quad R_1 = 0$$

die homogenen Gleichungen zweier Punkte 0 und 1, die durch ihre Coordinaten x_0, y_0, z_0, p_0 und x_1, y_1, z_1, p_1 gegeben sind. Es ist ferner:

$$\lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 = 0$$

die Gleichung irgend eines Punktes P auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte. Bezeichnet man mit x, y, z, p die Coordinaten dieses Punktes und bestimmt dieselben aus der zuletzt angegebenen Gleichung, so erhält man:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1, \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1, \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1, \\ p &= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nun die Coordinaten x, y, z, p aller Punkte auf der Verbindungslinie der beiden Punkte 0 und 1,

wenn man λ_0 und λ_1 beliebig variiren lässt. Man kann aber auch $\lambda_0 = 1$ setzen und allein λ_1 variiren lassen. Die Coordinaten des zu P harmonischen Punktes erhält man aus (1), wenn man λ_1 in $-\lambda_1$ umwandelt.

Aus den gegebenen Gleichungen von drei Punkten 0, 1, 2:

$$R_0 = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0$$

setzt sich die Gleichung eines beliebigen Punktes der Ebene zusammen, die durch die gegebenen drei Punkte hindurchgeht:

$$\lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = 0.$$

Die Coordinaten x, y, z, p dieses Punktes stellen sich dar wie folgt:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \\ p &= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke geben die Coordinaten aller Punkte der genannten Ebene, wenn man λ_0, λ_1, λ_2 beliebig variiren lässt oder auch nur zwei von diesen Grössen.

Ebenso setzt sich aus den gegebenen vier Punktgleichungen:

$$R_0 = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0$$

die Gleichung eines beliebigen Punktes im Raume zusammen:

$$\lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = 0,$$

woraus man die Coordinaten x, y, z, p dieses Punktes erhält:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3, \\ p &= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3, \end{aligned}$$

Die analogen Betrachtungen, angestellt bei homogenen Gleichungen der Ebenen, führen auf ganz analog gebildete Relationen.

Bezeichnet man nämlich mit W_k den Ausdruck:

$$W_k = u_k x + v_k y + w_k z + r_k p,$$

so hat man die Gleichungen zweier durch ihre homogenen Coordinaten u_0, v_0, w_0, r_0 und u_1, v_1, w_1, r_1 gegebenen Ebenen 0 und 1:

$$W_0 = 0, \quad W_1 = 0.$$

Irgend eine Ebene, die durch die Schnittlinie der gegebenen Ebenen hindurchgeht, hat zur Gleichung:

$$\lambda_0 W_0 + \lambda_1 W_1 = 0.$$

Wenn nun u, v, w, r die Coordinaten dieser Ebene bezeichnen, so hat man:

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1, \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1, \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1, \\ r &= \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1, \end{aligned}$$

und man erhält die Coordinaten aller durch die genannte Schnittlinie gehenden Ebenen, wenn man λ_0 und λ_1 variiren lässt oder auch nur eine von diesen willkürlichen Grössen. Fixirt man aber eine von diesen Ebenen, so erhält man die Coordinaten der ihr zugehörigen vierten harmonischen Ebene aus (4), wenn man für λ_1 setzt $-\lambda_1$.

In ähnlicher Weise drückt man die Coordinaten u, v, w, r einer beliebigen Ebene, welche durch den Schnittpunkt dreier durch ihre Coordinaten gegebenen Ebenen hindurchgeht, durch folgende Gleichungen aus:

$$(5) \quad \begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, \\ r &= \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2, \end{aligned}$$

Endlich lassen sich die Coordinaten u, v, w, r irgend einer Ebene im Raume durch die Coordinaten von vier Ebenen also ausdrücken:

$$(6) \quad \begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3, \\ r &= \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3, \end{aligned}$$

Stellt man die homogenen Gleichungen von vier Ebenen 0, 1, 2, 3, welche sich in einer und derselben geraden Linie schneiden:

$$W_0 = 0, \quad W_1 = 0, \quad W_0 - \lambda W_1 = 0, \quad W_0 - \mu W_1 = 0$$

zusammen mit den homogenen Coordinaten von irgend vier Punkten 0, 1, 2, 3, welche in derselben geraden Linie liegen:

$$\begin{array}{llll} x_0, & x_1, & x_0 - l x_1, & x_0 - m x_1, \\ y_0, & y_1, & y_0 - l y_1, & y_0 - m y_1, \\ z_0, & z_1, & z_0 - l z_1, & z_0 - m z_1, \\ p_0, & p_1, & p_0 - l p_1, & p_0 - m p_1, \end{array}$$

und drückt die vier Bedingungen aus, die erfüllt werden müssen, wenn diese vier Punkte respective in den vier Ebenen liegen, so erhält man:

$$W_0^0 = 0, \quad W_1^1 = 0, \quad l W_0^1 + \lambda W_1^0 = 0, \quad m W_0^1 + \mu W_1^0 = 0,$$

wenn W_0^0 und W_1^0 die Ausdrücke bezeichnen, in welche W_0 und W_1 übergehen durch Vertauschung der variabeln Coordinaten mit den Coordinaten des Punktes 0, und wenn W_0^1, W_1^1 die Ausdrücke bezeichnen, in welche W_0 und W_1 übergehen durch Vertauschung der variabeln Coordinaten mit den Coordinaten des Punktes 1. Aus den beiden letzten Bedingungen erhält man aber:

$$\frac{l}{m} = \frac{\lambda}{\mu},$$

dass heisst, die Punkte haben dasselbe anharmonische Verhältniss, als die Ebenen, auf welchen sie liegen. Sie sind deshalb harmonische Punkte, wenn die Ebenen harmonische Ebenen sind, und umgekehrt. Daraus entspringen die Sätze:

Vier harmonische Ebenen werden durch eine gerade Linie in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Vier in derselben geraden Linie sich schneidende Ebenen sind harmonische Ebenen, wenn jede derselben durch einen von vier harmonischen Punkten geht.

An diese Sätze schliessen sich unmittelbar folgende an:

Drei Ebenenpaare der Involution werden durch eine gerade Linie geschnitten in Punktepaaren der Involution.

Drei Paar Ebenen, welche sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, bilden eine Involution, wenn jede Ebene durch einen von sechs Punkten der Involution hindurchgeht.

Denn, sind drei Ebenenpaare der Involution gegeben, und man construirt dasjenige Ebenenpaar, welches harmonisch ist zu jedem der drei gegebenen Ebenenpaare, so schneidet das harmonische Ebenenpaar eine gegebene gerade Linie in einem Punktepaare, welches harmonisch ist zu den Schnittpunkten eines jeden der drei Ebenenpaare auf der gegebenen geraden Linie. Letztere bilden also nach der Definition eine Involution. Hieraus ergiebt sich zugleich der Beweis des letzten Satzes, wenn man Ebenen und Punkte in geeigneter Weise mit einander vertauscht.

Durch zwei in Punktcoordinaten lineare Gleichungen stellt man eine gerade Linie im Raume dar, nämlich die Schnittlinie der beiden Ebenen, welche die linearen Gleichungen einzeln ausdrücken. Denn die Coordinaten aller Punkte, welche auf dieser Schnittlinie liegen, genügen zu gleicher Zeit beiden Gleichungen, und umgekehrt, die Coordinaten, welche beiden Gleichungen zugleich genügen, gehören Punkten zu, welche auf der geraden Linie liegen.

In ähnlicher Weise kann man eine gerade Linie im Raume durch zwei in Ebenencoordinaten lineare Gleichungen darstellen. Denn die Coordinaten aller Ebenen, welche durch die Verbindungslinie der beiden Punkte hindurchgehen, genügen zugleich beiden Gleichungen, und umgekehrt alle Ebenencoordinaten, welche den beiden Gleichungen zugleich genügen, gehören Ebenen zu, die sich in der genannten Verbindungslinie schneiden.

Durch Einführung von zwei neuen Variabeln drückt man die gerade Linie im Raume analytisch durch vier Gleichungen aus, nämlich durch die Gleichungen (1) oder durch die Gleichungen (4). Aus ihnen erhält man die erwähnten zwei Ausdrücke der geraden Linie, indem man durch Elimination von λ_0 und λ_1 zwei Gleichungen bildet, im ersten Falle zwei lineare Gleichungen in Punktcoordinaten, im zweiten Falle zwei lineare Gleichungen in Ebenencoordinaten.

Es bringt bisweilen Vortheil, eine gerade Linie analytisch durch drei Gleichungen auszudrücken, indem man nur eine neue Variable einführt, wie folgt:

Wenn a, b, c die rechtwinkligen Coordinaten eines gegebenen Punktes o auf einer geraden Linie ausdrücken, und α, β, γ die Winkel, welche die gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet, so ist durch diese Bestimmungsstücke die Lage der geraden Linie im Raume unzweideutig gegeben, und die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes p auf der geraden Linie werden nicht mehr willkürlich sein, sondern gewissen Bedingungen genügen müssen. Um diese Bedingungen zu erhalten, projicire man die begrenzte gerade Linie op, deren Länge mit r bezeichnet werde, auf die Coordinatenaxen. Das eine Mal erhält man diese Projectionen gleich $x - a$, $y - b$, $z - c$, das andere Mal gleich $r \cos \alpha$, $r \cos \beta$, $r \cos \gamma$. Man hat daher für die gerade Linie die Gleichungen:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} x - a &= r \cos \alpha, \\ y - b &= r \cos \beta, \\ z - c &= r \cos \gamma, \end{aligned}$$

ausgedrückt durch die rechtwinkligen Coordinaten eines gegebenen Punktes auf ihr und durch die Winkel, die die gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet. Man erhält hieraus die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z aller Punkte der geraden Linie, indem man r beliebig variiren lässt, oder die Gleichungen zweier Ebenen, welche sich in der geraden Linie schneiden, wenn man die variable Grösse r eliminirt, welche die Entfernung des variabeln Punktes p von dem gegebenen Punkte o der geraden Linie ausdrückt.

Wir schliessen diese Vorlesung mit zwei Aufgaben, deren Auflösungen Gelegenheit geben werden, Formeln, welche in der ersten Vorlesung entwickelt wurden, in Anwendung zu bringen.

(8) . . . Den senkrechten Abstand Δ eines gegebenen Punktes von einer gegebenen geraden Linie im Raume zu bestimmen.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes seien a_1, b_1, c_1, und die Gleichungen der gegebenen geraden Linie:

$$x - a = r \,.\, \alpha,$$
$$y - b = r \,.\, \beta,$$
$$z - c = r \,.\, \gamma,$$

wo α, β, γ der Kürze wegen die Cosinus der Winkel ausdrücken, welche die gegebene gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet.

Fällt man von dem gegebenen Punkte (a_1, b_1, c_1) auf die gegebene gerade Linie das Loth Δ, und verbindet den gegebenen Punkt mit dem in der geraden Linie gegebenen Punkte (a, b, c) durch eine Gerade A, so bilden das Loth Δ, die construirte Gerade A und das Stück B der gegebenen geraden Linie, welches zwischen beiden liegt, ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem man hat:

$$\Delta = A \,.\, \sin(AB).$$

Es ist nun:

$$\sin(AB) = \sqrt{\{(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\}},$$

wenn $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Gerade A mit den Cordinatenaxen bildet. Diese Cosinus drücken sich aber so aus:

$$\alpha_1 = \frac{a - a_1}{A}, \qquad \beta_1 = \frac{b - b_1}{A}, \qquad \gamma_1 = \frac{c - c_1}{A}.$$

Setzt man diese Werthe in die letzte Gleichung und den sich daraus ergebenden Werth von $\sin(AB)$ in die erste Gleichung, so erhält man den gesuchten senkrechten Abstand:

$$\Delta = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} \quad [\beta(c - c_1) - \gamma(b - b_1)]^2 \\ + [\gamma(a - a_1) - \alpha(c - c_1)]^2 \\ + [\alpha(b - b_1) - \beta(a - a_1)]^2 \end{array}\right\}}$$

Um noch die Coordinaten ξ, η, ζ des Fusspunktes des Lothes Δ auf der gegebenen geraden Linie zu bestimmen, drücken wir B aus, wie folgt:

$$B = A \,.\, \cos(AB) = A(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1),$$

und durch Einsetzen der oben angegebenen Werthe von α_1, β_1, γ_1:

$$B = \alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1) + \gamma(c - c_1).$$

Ist hierdurch aber die Länge von B bestimmt, so erhält man durch Projection derselben auf die Coordinatenaxen:

$$\xi - a = B \,.\, \alpha,$$
$$\eta - b = B \,.\, \beta,$$
$$\zeta - c = B \,.\, \gamma.$$

(9) . . . Die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien im Raume von einander zu bestimmen.

Es seien die Gleichungen der gegebenen beiden geraden Linien L, L_1:

$$x - a = r \,.\, \alpha, \quad x_1 - a_1 = r_1 \,.\, \alpha_1,$$
$$y - b = r \,.\, \beta, \quad y_1 - b_1 = r_1 \,.\, \beta_1,$$
$$z - c = r \,.\, \gamma, \quad z_1 - c_1 = r_1 \,.\, \gamma_1.$$

Das Quadrat der Entfernung R eines beliebigen Punktes (x, y, z) der einen geraden Linie von einem beliebigen Punkte (x_1, y_1, z_1) der anderen geraden Linie stellt sich als Function der Coordinaten der beiden Punkte so dar:

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Diese Coordinaten sind so zu bestimmen, dass R^2 unter den angegebenen, zwischen ihnen stattfindenden, Bedingungsgleichungen ein Minimum werde. Denkt man sich aber die Werthe der Coordinaten aus den gegebenen Gleichungen der geraden Linien in den Ausdruck R^2 eingesetzt, so wird R^2 eine Function allein der von einander unabhängigen Variabeln r und r_1. Die Differentialrechnung lehrt die Werthe der Variabeln bestimmen, welche eine solche Fucntion zu einem Minimum machen. Dieses geschieht aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{dR^2}{dr} = 0, \quad \frac{dR^2}{dr_1} = 0.$$

Setzt man die sich aus diesen beiden Gleichungen ergebenden Werthe der Variabeln r und r_1 in die Gleichungen der beiden geraden Linien ein, so erhält man die Coordinaten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) der Begrenzungspunkte der kürzesten geraden Linie R auf den beiden gegebenen geraden Linien.

Die zuletzt genannten beiden Gleichungen stellen sich, wenn man für R^2 seinen angegebenen Werth setzt, also dar:

$$(x - x_1)\alpha + (y - y_1)\beta + (z - z_1)\gamma = 0.$$
$$(x - x_1)\alpha_1 + (y - y_1)\beta_1 + (z - z_1)\gamma_1 = 0.$$

Da aber die Differenzen $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ der Coordinaten der Begrenzungspunkte der kürzesten geraden Linie R sich verhalten wie die Cosinus α_3, β_3, γ_3 der Winkel, welche die kürzeste Linie R mit den Coordinatenaxen bildet, so kann man diese Gleichungen auch so schreiben:

$$\alpha_3\alpha + \beta_3\beta + \gamma_3\gamma = 0,$$
$$\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0,$$

in welcher Form die linken Theile der Gleichungen die Cosinus der Neigungswinkel ausdrücken, welche die kürzeste Linie R mit den gegebenen beiden Linien L und L_1 bildet. Da diese Cosinus aber gleich 0 sind, so folgt hieraus, dass die kürzeste Linie R senkrecht steht auf jeder der beiden gegebenen Linien L und L_1.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Verhältnisse von α_3, β_3, γ_3:

$$\lambda\alpha_3 = \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma,$$
$$\lambda\beta_3 = \gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha,$$
$$\lambda\gamma_3 = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta,$$

woraus man wieder, indem man quadrirt und addirt, erhält:

$$\lambda^2 = \sin^2(LL_1) = (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2.$$

Setzt man diesen Werth von λ in die letzten drei Gleichungen, so erhält man die Cosinus der Winkel, welche die kürzeste Linie mit den Coordinatenaxen bildet:

$$\alpha_3 = \frac{\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma}{\sin(LL_1)},$$

$$\beta_3 = \frac{\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha}{\sin(LL_1)},$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}{\sin(LL_1)}.$$

Um die Länge der kürzesten Linie zu erhalten, projicire man die Verbindungslinie D der auf den Linien L und L_1 gegebenen beiden Punkte (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1), welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus wir bezeichnen mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, auf die kürzeste Linie R. Sie wird R selber sein, weil die gegebenen beiden geraden Linien L, L_1 auf der kürzesten Linie R zwischen beiden senkrecht stehen. Man hat daher:

$$R = D \,.\, \cos(DR) = D(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3).$$

Da aber:

$$D\alpha_2 = a - a_1, \quad D\beta_2 = b - b_1, \quad D\gamma_2 = c - c_1,$$

so erhält man aus der letzten Gleichung durch Einsetzen dieser Werthe und der vorhin angegebenen für α_3, β_3, γ_3 und $\sin(LL_1)$:

$$(10)\,..\; R = \frac{(a-a_1)(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) + (b-b_1)(\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha) + (c-c_1)(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{\sqrt{\{(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\}}}.$$

Es bleibt noch übrig, die Werthe von r und r_1 zu bestimmen, welche R^2 zu einem Minimum machen, um mit Hülfe der gegebenen Gleichungen der geraden Linien L und L_1 die Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 der Begrenzungspunkte der kürzesten Linie R auszudrücken. Hierzu dienen die zu Anfang der Untersuchung aufgestellten beiden Gleichungen, die sich, wenn man für x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Werthe aus den Gleichungen der gegebenen beiden geraden Linien substituirt, reduciren auf:

$$(a-a_1)\alpha + (b-b_1)\beta + (c-c_1)\gamma + r - r_1\cos(LL_1) = 0,$$
$$(a-a_1)\alpha_1 + (b-b_1)\beta_1 + (c-c_1)\gamma_1 + r\cos(LL_1) - r_1 = 0.$$

Diese Gleichungen gehen, wenn man für die Differenzen $a - a_1$, $b - b_1$, $c - c_1$ die vorhin angegebenen Werthe $D\alpha_2$, $D\beta_2$, $D\gamma_2$ setzt, über in:

$$D\cos(LD) + r - r_1\cos(LL_1) = 0,$$
$$D\cos(L_1D) + r\cos(LL_1) - r_1 = 0,$$

und durch Auflösung dieser Gleichungen nach r und r_1 erhält man:

$$r = \frac{D}{\sin^2 (LL_1)} [\cos (L_1 D) \,.\, \cos (L L_1) - \cos (L\, D)],$$

$$r_1 = - \frac{D}{\sin^2 (LL_1)} [\cos (L\, D) \,.\, \cos (LL_1) - \cos (L_1 D)],$$

Dadurch sind aber die Grössen r und r_1 unzweideutig bestimmt. Um sie durch die gegebenen Grössen auszudrücken, hat man folgende Substitutionen zu machen:

$$\begin{aligned} D \cos (L\, D) &= (a - a_1)\, \alpha + (b - b_1)\, \beta + (c - c_1)\, \gamma, \\ D \cos (L_1 D) &= (a - a_1)\, \alpha_1 + (b - b_1)\, \beta_1 + (c - c_1)\, \gamma_1, \\ \cos (LL_1) &= \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1, \\ \sin^2 (LL_1) &= (\beta \gamma_1 - \beta_1 \gamma)^2 + (\gamma \alpha_1 - \gamma_1 \alpha)^2 + (\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta)^2. \end{aligned}$$

Siebente Vorlesung.

Determinanten.

Ein wesentliches Hülfsmittel zur Umformung von Gleichungen, welche als eine der Aufgaben der analytischen Geometrie bezeichnet wurde, ist die Determinantentheorie. Um dieses Hülfsmittels in dem Folgenden nicht zu entbehren, sollen in dieser Vorlesung der Begriff der Determinante und aus ihm einige Sätze der Determinantentheorie entwickelt werden.

Es ist eine Eigenschaft des Products sämmtlicher Differenzen von $(n + 1)$ Elementen $a_0, a_1 \ldots a_n$:

$$\begin{aligned} P = (a_1 - a_0)\ (a_2 - a_0) \ldots &(a_n - a_0), \\ (a_2 - a_1) \ldots &(a_n - a_1), \\ \ldots \ldots & \\ &(a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$

welches aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Factoren besteht, dass dieses Product nur sein Vorzeichen ändert, wenn man die Elemente a_0 und a_1 mit einander vertauscht. Aber diese Eigenschaft gilt allgemein für irgend zwei von den angegebenen Elementen $a_\varkappa$ und a_λ. Man überzeugt sich von der Wahrheit dieser Behauptung leicht, wenn man die Factoren also ordnet:

$$\pm\, P = (a_\varkappa - a_\lambda)\ \Pi\, (a_{\varkappa'} - a_\varkappa)\ \Pi\, (a_{\lambda'} - a_\lambda)\ \Pi\, (a_{\varkappa'} - a_{\lambda'}),$$

woselbst angenommen ist, dass $\varkappa'$ und λ' die Zahlen $0, 1 \ldots n$ mit Ausnahme der Zahlen $\varkappa$ und λ, und dass $\Pi(a_{\varkappa'} - a_\varkappa)$ das Product aus den Factoren $a_{\varkappa'} - a_\varkappa$ etc. . . . bedeuten. Denn durch die angegebene Vertauschung ändert nur der erste Factor sein Vorzeichen. Der zweite und dritte Factor gehen in einander über, während der letzte Factor ganz ungeändert bleibt. Da ferner immer einer der $\frac{n(n+1)}{2}$ Factoren von P verschwindet, wenn man für ein Element ein anderes setzt, so kann man folgende beide bemerkenswerthe Eigenschaften des Productes P hervorheben.

Das Product P ändert nur sein Vorzeichen, wenn man zwei Elemente in demselben mit einander vertauscht.

Das Product P verschwindet, wenn man für eines der $(n+1)$ Elemente ein anderes setzt.

Die Entwickelung des Products P giebt Glieder von der Form:

$$c \quad a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\varkappa^{\alpha_\varkappa} a_\lambda^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

Da aber das Product selbst aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Factoren besteht, so hat man:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \quad \alpha_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Das angegebene Glied der Entwickelung verlangt, dass in derselben auch folgendes Glied enthalten sei:

$$-c \quad a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\lambda^{\alpha_\varkappa} a_\varkappa^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, als das angegebene Glied. Denn da durch Vertauschung der Elemente $a_\varkappa$ und a_λ das Product P übergeht in $-P$, so müssen in der Entwickelung von P die Glieder paarweise mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen, so dass sie, abgesehen von dem Vorzeichen, durch die angegebene Vertauschung der Elemente in einander übergehen. Hieraus folgt, dass die Exponenten $\alpha_\varkappa$ und α_λ verschiedene ganze Zahlen sind. Denn wären sie gleiche Zahlen, so würden sich die beiden angegebenen Glieder der Entwickelung fortheben. Es sind also die Exponenten $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$

verschiedene ganze Zahlen. Da aber die Summe derselben gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ ist, so können sie nur die Zahlen sein:

$$0, 1, 2, \ldots n$$

in irgend einer Reihenfolge.

Diese Bemerkungen geben ein Mittel an die Hand, aus einem Gliede der Entwickelung von P alle übrigen zu bilden. Ein erstes positives Glied der Entwickelung ist:

$$a_0^0\, a_1^1 \ldots a_n^n,$$

welches man erhält, wenn man die positiven Theile der Differenzen in dem Product P mit einander multiplicirt. Aus diesem positiven Gliede geht durch Vertauschung zweier Elemente, oder, was dasselbe ist, zweier Indices ein Glied der Entwickelung hervor, welchem das negative Vorzeichen zuzuertheilen ist; aus diesem letzteren wieder ein positives, wenn man zwei andere Elemente oder Indices mit einander vertauscht u. s. w.

Aus diesem Grunde erhält man aus dem angegebenen ersten positiven Gliede der Entwickelung von P alle Glieder der Entwickelung durch Permutation aller $(n+1)$ Elemente oder Indices, indem man die Exponenten ungeändert lässt. Die Vorzeichen dieser so gebildeten $1.2\ldots(n+1)$ Glieder richten sich nach dem ersten Gliede in der Art, dass ein bestimmtes Glied das positive oder negative Vorzeichen erhält, je nachdem es aus dem ersten durch eine gerade oder durch eine ungerade Zahl von Permutationen zweier Indices hervorgegangen ist.

Ist zum Beispiel $n = 2$, so erhält man auf die angegebene Art die Entwickelung des Products $P = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)$ aus dem ersten Gliede $a_0^0\, a_1^1\, a_2^2$:

$$P = a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_2^1 a_1^2 + a_1^0 a_2^1 a_0^2 - a_1^0 a_0^1 a_2^2 + a_2^0 a_0^1 a_1^2 - a_2^0 a_1^1 a_0^2.$$

Man kann aber auch aus dem angegebenen ersten positiven Gliede der Entwickelung des Products P alle übrigen Glieder durch Permutation der Exponenten herleiten, indem man die Indices ungeändert lässt. Das Vorzeichen eines so gebildeten Gliedes ist wieder das positive oder negative, je

nachdem das Glied aus dem ersten positiven durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen zweier Exponenten entstanden ist.

Denn ist ein Glied der Entwickelung von P:

$$\pm \quad a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\varkappa^{\alpha_\varkappa} a_\lambda^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

so weiss man, dass dieses ein zweites von entgegengesetztem Vorzeichen bedingt:

$$\mp \quad a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\lambda^{\alpha_\varkappa} a_\varkappa^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

welche Glieder, abgesehen von den Vorzeichen, in einander übergehen, wenn man $a_\varkappa$ mit a_λ vertauscht. Diese Glieder gehen aber, abgesehen von den Vorzeichen, auch in einander über, wenn man die Exponenten $\alpha_\varkappa$ und α_λ mit einander vertauscht. Das erste angegebene Glied bedingt also das zweite von entgegengesetztem Vorzeichen, welches aus ihm durch Vertauschung irgend zweier Exponenten $\alpha_\varkappa$ und α_λ erhalten wird. Demnach gilt dasselbe von den Exponenten, was im Vorhergehenden von den Indices nachgewiesen worden ist.

Wenn man in der angegebenen Entwickelung des Productes P die Exponenten $0, 1, \ldots n$ der $(n+1)$ Elemente obere Indices bedeuten lässt, so hat man in der Voraussetzung, dass $a_\varkappa^\lambda$ Symbole seien für irgend welche Grössen, die sich mit $\varkappa$ und λ ändern, einen Ausdruck A von $(n+1)^2$ Elementen $a_\varkappa^\lambda$, den man Determinante nennt.

Wie nun die Glieder der Entwickelung des Products P aus dem ersten angegebenen positiven entstehen durch Permutation der unteren Indices oder durch Permutation der Exponenten, so ergeben sich auch aus dem ersten positiven Gliede der Determinante alle übrigen Glieder derselben, entweder durch Permutation der unteren oder der oberen Indices. Man braucht also nur das erste positive Glied der Determinante zu kennen, um alle übrigen Glieder derselben mit dem positiven oder negativen Vorzeichen aus demselben abzuleiten. Daher bezeichnet man die Determinante A, indem man nur das erste positive Glied anmerkt, mit dem Zeichen:

(1) . . . . $A = \Sigma \pm a_0{}^0\, a_1{}^1 \ldots a_n{}^n.$

Doch reicht diese Bezeichnung nicht aus in den Fällen, wo specielle Operationen mit den Elementen selbst auszuführen sind. In diesen Fällen bedient man sich, indem man alle Elemente der Determinante angiebt, der Bezeichnung:

$$(2) \ldots\ldots A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Zieht man aber in Erwägung, dass alle Glieder der Determinante aus dem ersten positiven Gliede entstehen durch Permutation der oberen oder der unteren Indices, dass das erste Glied selbst ungeändert bleibt, wenn man in jedem Elemente den oberen Index mit dem unteren vertauscht, so sieht man ein, dass man auch in der Determinante den oberen Index eines jeden Elementes mit dem unteren vertauschen kann, ohne die Determinante selbst zu ändern. Man hat daher:

$$(3) \ldots\ldots A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_0^1, & \ldots & a_0^n \\ a_1^0, & a_1^1, & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0, & a_n^1, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Die Determinante A zeigt Eigenschaften, die den hervorgehobenen Eigenschaften des Productes P ganz ähnlich sind, und welche sich also ausdrücken lassen:

(4) . . . Die Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei untere oder zwei obere Indices der Elemente mit einander vertauscht.

(5) . . . Die Determinante verschwindet, wenn man für einen unteren Index der Elemente einen anderen unteren Index, oder wenn man für einen oberen Index der Elemente einen anderen oberen Index setzt.

Diese Eigenschaften der Determinante A ergeben sich aus der Betrachtung der Summe der beiden zuletzt angegebenen Glieder der Entwickelung von P, die in die entsprechenden Determinantenglieder übergehen, wenn man die

Exponenten in denselben als obere Indices betrachtet. Denn auch die Summe der beiden Determinantenglieder ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man $a_\varkappa$ mit a_λ vertauscht, oder $\alpha_\varkappa$ mit α_λ; sie verschwindet, wenn man für a_λ setzt $a_\varkappa$, oder für α_λ setzt $\alpha_\varkappa$. Da nun die ganze Determinante aus solchen Gliederpaaren besteht, die dieselbe Eigenschaft haben, so theilt die Determinante diese Eigenschaft mit ihnen.

Um noch andere Formen der Determinante A hervorzuheben, deren Bildungsgesetz auseinandergesetzt worden ist, betrachte man ein beliebiges Glied derselben:

$$\pm \quad a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Dasselbe hat den Factor $a_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$. Da nun $\alpha_\varkappa$ irgend eine der Zahlen $0, 1 \ldots n$ bedeutet, so sieht man, dass jedes Glied der Determinante einen Factor hat $a_\varkappa$ mit irgend einem der oberen Indices $0, 1 \ldots n$. Bezeichnet man daher mit $A_\varkappa^\lambda a_\varkappa^\lambda$ die Summe der Glieder, welche den Factor $a_\varkappa^\lambda$ haben, so stellt sich die Determinante A dar als die Summe von Producten, wie folgt:

$$(6) \ldots \quad A = A_\varkappa^0 a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 a_\varkappa^1 + \ldots A_\varkappa^n a_\varkappa^n,$$

wobei zu bemerken ist, dass die Ausdrücke $A_\varkappa^0, A_\varkappa^1 \ldots A_\varkappa^n$ die Elemente $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1 \ldots a_\varkappa^n$ nicht enthalten. Denn enthielte einer dieser Ausdrücke noch eines der angegebenen Elemente, so würde ein Glied der Entwickelung von A zwei Factoren haben mit demselben unteren Index $\varkappa$.

Aber jedes Glied der Determinante A hat auch den Factor $a^\varkappa$ mit irgend einem unteren Index $0, 1 \ldots n$. Es stellt sich daher die Determinante, wenn man wie vorhin mit $A_\lambda^\varkappa a_\lambda^\varkappa$ die Summe der Glieder bezeichnet, welche den Factor $a_\lambda^\varkappa$ haben, auch so dar:

$$(7) \ldots \quad A = A_0^\varkappa a_0^\varkappa + A_1^\varkappa a_1^\varkappa + \ldots A_n^\varkappa a_n^\varkappa,$$

indem $A_0^\varkappa, A_1^\varkappa \ldots A_n^\varkappa$ Ausdrücke bedeuten, die die Elemente $a_0^\varkappa, a_1^\varkappa \ldots a_n^\varkappa$ nicht enthalten. Daraus folgt, dass der Ausdruck $A_\varkappa^\lambda$ weder die Elemente $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1 \ldots a_\varkappa^n$, noch die Elemente $a_0^\lambda, a_1^\lambda \ldots a_n^\lambda$ enthält. Setzt man daher in (6) statt des unteren Index $\varkappa$ der Elemente durchweg einen anderen

unteren Index λ, oder in (7) statt des oberen Index $\varkappa$ der Elemente durchweg einen anderen oberen Index λ, so erhält man mit Rücksicht auf (5):

$$(8) \ldots \quad 0 = A_\varkappa^0\, a_\lambda^0 + A_\varkappa^1\, a_\lambda^1 + \ldots A_\varkappa^n\, a_\lambda^n .$$

$$(9) \ldots \quad 0 = A_0^\varkappa\, a_0^\lambda + A_1^\varkappa\, a_1^\lambda + \ldots A_\varkappa^n\, a_n^\lambda .$$

Die $(n+1)^2$ eingeführten Ausdrücke $A_\varkappa^\lambda$ lassen sich auch als die partiellen Differentialquotienten der Determinante A, nach den Elementen derselben genommen, darstellen. Denn differentiirt man die Gleichung (6) oder (7) partiell nach $a_\varkappa^\lambda$, so erhält man:

$$(10) \ldots\ldots \quad \frac{\partial A}{\partial a_\varkappa^\lambda} = A_\varkappa^\lambda .$$

Sie lassen sich aber auch als Determinanten darstellen. Denn setzt man zum Beispiel $\varkappa = a_0^1 = a_0^2 \ldots = a_0^n = 0$, so erhält man aus (6) mit Rücksicht auf (2):

$$(11) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots a_n^0 \\ 0, & a_1^1, & \ldots a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & a_1^n, & \ldots a_n^n \end{vmatrix} = A_0^0\, a_0^0;$$

Ebenso erhält man aus (7), wenn man setzt $\varkappa = a_1^0 = a_2^0 \ldots = a_n^0 = 0$, mit Rücksicht auf (2):

$$(12) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_0^0, & 0, & \ldots 0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots a_n^n \end{vmatrix} = A_0^0\, a_0^0.$$

Geht man auf die Bildungsweise der Determinante A aus ihrem ersten positiven Gliede zurück und permutirt alle oberen Indices $1, 2 \ldots n$ oder alle unteren Indices $1, 2 \ldots n$ (mit der Anmerkung des richtigen Vorzeichens eines jeden Gliedes), so sieht man, dass man nicht alle Glieder der Determinante erhält, sondern nur die Glieder, welche den Factor a_0^0 haben. Da die Summe dieser Glieder aber ist: $A_0^0\, a_0^0$, so hat man mit Unterdrückung des Factors a_0^0:

$$(13) \ldots\ldots \quad A_0^0 = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2 \ldots a_n^n,$$

woraus man durch Vergleichung mit (11) und (12) erhält:

$$(14)\ \ldots \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ 0, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^0, & 0, & \ldots & 0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$
$$= a_0^0 \, \Sigma \pm a_1^1 \, a_2^2 \ldots a_n^n.$$

In gleicher Weise erhält man aus dem ersten positiven Gliede der Determinante A durch Permutation der oberen oder der unteren Indices $0,\ 1 \ldots (n-1)$ die Summe der mit a_n^n multiplicirten Glieder $a_n^n \, \Sigma \pm a_0^0 \, a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}$ der Determinante. Da diese Summe aber gleich ist $A_n^n \, a_n^n$, so hat man mit Unterdrückung des Factors a_n^n:

$$(15)\ \ldots\ldots \quad A_n^n = \Sigma \pm a_0^0 \, a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}.$$

Es ergiebt sich hieraus eine Regel zur Bildung der Partialdeterminante A_0^0 in (13) und der Partialdeterminante A_n^n in (15) aus der Determinante A. Unterdrückt man nämlich sämmtliche Elemente in der Determinante A, welche mit a_0^0 in derselben Horizontalreihe und in derselben Verticalreihe stehen, so bilden die übrig bleibenden Elemente die Determinante A_0^0. Das Gleiche lässt sich von der Determinante A_n^n sagen, wenn man für das Element a_0^0 das Element a_n^n nimmt.

Da man durch mehrmalige Vertauschung zweier Horizontalreihen oder zweier Verticalreihen der Elemente in der Determinante A, wodurch sich nur das Vorzeichen der Determinante ändert, das Element $a_\varkappa^\lambda$ immer in die Stelle des ersten Elementes a_0^0 bringen kann, so sieht man, dass auch alle Grössen $A_\varkappa^\lambda$, welche wir in (10) als partielle Differentialquotienten der Determinante A erkannt haben, sich wie in (13) und (15) als Determinanten von n^2 Elementen darstellen lassen.

Die Bildungsweise der Partialdeterminante $A_\varkappa^\lambda$ aus der Determinante A stellen wir auf ohne Beweis, den man aus dem Vorhergehenden leicht entnehmen kann.

„Aus der Determinante A erhält man die Partialdeter-
„minante $A_\varkappa^\lambda$ dem absoluten Werthe nach, wenn man in A

„sämmtliche Elemente unterdrückt, welche mit $a_\varkappa^\lambda$ in dersel-
„ben Horizontalreihe und in derselben Verticalreihe stehen.
„Das Vorzeichen wird das positive oder negative je nachdem
„$(\varkappa + \lambda)$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.“

Setzt man in der Gleichung (7), in welcher $\varkappa = n$ sei, $a_n^n + p$ für a_n^n, so geht dieselbe über in:

$$\begin{vmatrix} a_0^0, a_1^0, \ldots a_n^0 \\ a_0^1, a_1^1, \ldots a_n^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_0^n, a_1^n, \ldots (a_n^n + p) \end{vmatrix} = A_0^n a_0^n + A_1^n a_1^n + \ldots A_n^n a_n^n + A_n^n p$$

$$= A + A_n^n p,$$

oder in:

$$(16) \ldots \quad \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots (a_n^n + p) \end{vmatrix} = \begin{matrix} \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n \\ + p \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}. \end{matrix}$$

Die Gleichungen (6) bis (9) dienen zur Auflösung zweier Systeme linearer Gleichungen mit den $(n + 1)$ Unbekannten $x_0, x_1 \ldots x_n$ und den $(n + 1)$ Unbekannten $Y_0, Y_1 \ldots Y_n$, die sich unter der Voraussetzung, dass λ die Zahlen bedeutet $0, 1 \ldots n$, in abgekürzter Form also darstellen:

$$(17) \ldots \quad X_\lambda = a_0^\lambda x_0 + a_1^\lambda x_1 + \ldots a_n^\lambda x_n.$$

$$(18) \ldots \quad y_\lambda = a_\lambda^0 Y_0 + a_\lambda^1 Y_1 + \ldots a_\lambda^n Y_n.$$

Multiplicirt man nämlich (17) mit $A_\varkappa^\lambda$, setzt für λ alle Zahlen $0, 1 \ldots n$ und addirt; oder multiplicirt (18) mit $A_\lambda^\varkappa$, setzt für λ alle Zahlen $0, 1 \ldots n$ und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (6) bis (9):

$$(19) \ldots \quad A x_\varkappa = A_\varkappa^0 X_0 + A_\varkappa^1 X_1 + \ldots A_\varkappa^n X_n.$$

$$(20) \ldots \quad A Y_\varkappa = A_0^\varkappa y_0 + A_1^\varkappa y_1 + \ldots A_n^\varkappa y_n.$$

Diese beiden Gleichungen repräsentiren wieder zwei Systeme von Gleichungen, da $\varkappa$ die Zahlen bedeutet $0, 1 \ldots n$, und geben die Werthe der Unbekannten $x_\varkappa$ als lineare Aus-

drücke der $X_\varkappa$ und die Werthe der Unbekannten $Y_\varkappa$ als lineare Ausdrücke der $y_\varkappa$.

Die beiden gegebenen Systeme linearer Gleichungen (17), (18) haben dieselben $(n+1)^2$ Coefficienten $a_\varkappa^\lambda$ der Unbekannten, nur ihre Anordnung ist verschieden. Jede $\varkappa$te Horizontalreihe der Coefficienten in dem einen Systeme ist gerade die $\varkappa$te Verticalreihe des anderen Systemes. Dasselbe trifft auch bei den aufgelösten Gleichungen (19), (20) zu, wie die Ansicht dieser Gleichungen lehrt. Deshalb braucht man nur das eine von den beiden Systemen (17), (18) wirklich aufzulösen. Die Auflösung des anderen ergiebt sich nach dieser Bemerkung von selbst.

Die Gleichungen (19), (20) nehmen die einfachere Gestalt an:

(21) . . . $x_\varkappa = e_\varkappa{}^0 X_0 + e_\varkappa{}^1 X_1 + \ldots e_\varkappa{}^n X_n,$

(22) . . . $Y_\varkappa = e_0{}^\varkappa y_0 + e_1{}^\varkappa y_1 + \ldots e_n{}^\varkappa y_n,$

wenn man der Kürze wegen setzt $\frac{A_\varkappa^\lambda}{A} = e_\varkappa^\lambda$. Man kann daher die hervorgehobene Bemerkung als Satz also aussprechen:

(23) . . . Wenn (21) die Auflösungen sind des Systemes linearer Gleichungen (17), so sind (22) die Auflösungen des Systemes linearer Gleichungen (18).

Nimmt man an, um einen speciellen Fall zu betrachten, dass für alle Werthe von $\varkappa$ und λ sei $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$, so wird die $\varkappa$te Horizontalreihe der Coefficienten in (17) gleich der $\varkappa$ten Verticalreihe in denselben Gleichungen, und diese Gleichungen gehen, abgesehen von der Bezeichnung der Unbekannten, in (18) über, wenn man setzt $X_\lambda = y_\lambda$. Da aber unter dieser Annahme die Werthe der Unbekannten, die durch (21) und (22) ausgedrückt sind, einander gleich sein müssen, welches auch die Werthe von $X_\lambda = y_\lambda$ seien, so ergiebt sich aus dem Vergleich von (21) und (22), dass auch $e_\varkappa^\lambda = e_\lambda^\varkappa$.

Zu demselben Resultat gelangt man auch durch den Vergleich der Gleichungen (6), (8) mit den Gleichungen (7), (9). Die Gleichungen (6), (8) stellen nämlich, wenn $\lambda = 0, 1 \ldots n$, ein ganzes System von $(n+1)$ Gleichungen dar. Ein zweites

System stellen unter derselben Voraussetzung die Gleichungen (7), (9) dar. Betrachtet man in dem ersten System $A_\varkappa^0$, $A_\varkappa^1$ ... $A_\varkappa^n$ als die Unbekannten, in dem zweiten System $A_0^\varkappa$, $A_1^\varkappa$ ... $A_n^\varkappa$ als die Unbekannten, so hat man zwei Systeme linearer Gleichungen, die sich, wenn für alle Werthe von $\varkappa$ und λ, $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$ ist, nur durch die Bezeichnung der Unbekannten von einander unterscheiden. Man hat daher $A_\varkappa^0 = A_0^\varkappa$, $A_\varkappa^1 = A_1^\varkappa \ldots A_\varkappa^n = A_n^\varkappa$, woraus, wie vorhin, folgt $e_\varkappa^\lambda = e_\lambda^\varkappa$.

Lineare Gleichungen von der beschriebenen Art treten auf, wenn man für die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Function der zweiten Ordnung neue Variable einführt. Denn bezeichnet man die Summe $\Sigma\, a_\varkappa^\lambda\, x_\varkappa\, x_\lambda$, eine Function der zweiten Ordnung in Rücksicht auf die Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$, mit dem Zeichen:

$$(24) \ldots\ldots \quad f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \Sigma\, a_\varkappa^\lambda\, x_\varkappa\, x_\lambda,$$

so kann man durch Einführung der neuen Variabeln $X_\varkappa$ und unter der Voraussetzung, dass $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$, die Gleichungen (17) also darstellen:

$$(25) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_\varkappa = \tfrac{1}{2} f'(x_\varkappa).$$

Ihre Auflösungen (21) nehmen, wenn man die Function F definirt als die Summe:

$$(26) \ldots\ldots \quad F(X_0, X_1, \ldots X_n) = \Sigma\, e_\varkappa^\lambda\, X_\varkappa\, X_\lambda,$$

da $e_\varkappa^\lambda = e_\lambda^\varkappa$ ist, eine eben so einfache Gestalt an, nämlich:

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_\varkappa = \tfrac{1}{2} F'(X_\varkappa).$$

Diese Bemerkungen lassen sich kurz in folgendem Satze zusammenfassen:

(28) .... Wenn man lineare Gleichungen von der Form (25) auflöst, so stellen sich die aufgelösten Gleichungen unter der Form (27) dar.

Die Function F nennt man die reciproke Function der Function f und umgekehrt f die reciproke Function von F. Wie die eine Function von der anderen abgeleitet werden kann, ist aus dem Vorhergehenden klar.

Aus der Darstellung der Determinante A in (6) und (7) lassen sich noch andere Sätze entwickeln. Man kann nämlich in dieser Darstellung bemerken, dass A in ϱA übergeht, wenn man für $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1, \ldots a_\varkappa^n$ respective setzt $\varrho a_\varkappa^0, \varrho a_\varkappa^1 \ldots \varrho a_\varkappa^n$, oder wenn man für $a_0^\varkappa, a_1^\varkappa \ldots a_n^\varkappa$ respective setzt $\varrho a_0^\varkappa, \varrho a_1^\varkappa \ldots \varrho a_n^\varkappa$. Daher hat man den Satz:

(29) . . . Wenn man sämmtliche Elemente einer Horizontalreihe oder sämmtliche Elemente einer Verticalreihe der Determinante mit demselben Factor multiplicirt, so geht die Determinante über in das Product der Determinante und dieses Factors.

Setzt man in (6) $a_\varkappa^0 + \varrho a_\lambda^0, a_\varkappa^1 + \varrho a_\lambda^1 \ldots a_\varkappa^n + \varrho a_\lambda^n$ respective für $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1 \ldots a_\varkappa^n$, so wird diese Gleichung nicht geändert, weil der Factor von ϱ im rechten Theile der Gleichung auf Grund von (8) verschwindet. Ebenso ändert sich auch die Gleichung (7) nicht, wenn man $a_0^\varkappa + \varrho a_0^\lambda, a_1^\varkappa + \varrho a_1^\lambda \ldots a_n^\varkappa + \varrho a_n^\lambda$ respective setzt für $a_0^\varkappa, a_1^\varkappa \ldots a_n^\varkappa$, weil auf Grund von (9) der Factor von ϱ im rechten Theile der Gleichung verschwindet. Diese Bemerkungen drücken wir als Satz so aus:

(30) . . . Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man in ihr eine Horizontalreihe oder Verticalreihe der Elemente vermehrt um die mit demselben Factor multiplicirten correspondirenden Elemente einer anderen Horizontalreihe oder Verticalreihe.

Man kann hiernach die Elemente einer Horizontalreihe oder Verticalreihe auch vermehren um die correspondirenden Elemente mehrerer anderer Horizontalreihen oder Verticalreihen, jede der letzteren Reihen mit einem anderen Factor multiplicirt, ohne die Determinante dadurch zu ändern.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden Eigenschaften einer Determinante entwickelt haben, so führen wir jetzt mit mehreren Determinanten den Fundamentalsatz aus der Theorie der Determinanten vor, das Multiplications-Theorem:

(31) . . . Wenn $C = \Sigma \pm c_0^0\, c_1^1 \ldots c_n^n$ und
$A = \Sigma \pm a_0^0\, a_1^1 \ldots a_n^n$, $B = \Sigma \pm b_0^0\, b_1^1 \ldots b_n^n$, so ist:

$$C = A \,.\, B$$

unter der Bedingung:

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa\, b_0^\lambda + a_1^\varkappa\, b_1^\lambda + \ldots a_n^\varkappa\, b_n^\lambda.$$

Die Bedingung dieses Satzes lässt sich kürzer so ausdrücken:

$$c_\varkappa^\lambda = \Sigma_m\, a_m^\varkappa\, b_m^\lambda.$$

Demnach ist das erste positive Glied der aus den Elementen c zusammengesetzten Determinante:

$$c_0^0\, c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0}\, a_{m_0}^0\, b_{m_0}^0 \,.\, \Sigma_{m_1}\, a_{m_1}^1\, b_{m_1}^1 \ldots \Sigma_{m_n}\, a_{m_n}^n\, b_{m_n}^n,$$

wo $m_0, m_1 \ldots m_n$ die Zahlen $0, 1 \ldots n$ bedeuten. Diese Gleichung kann man auch so darstellen:

$$c_0^0\, c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n}\left(a_{m_0}^0\, a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n \,.\, b_{m_0}^0\, b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n\right).$$

Aus diesem ersten Gliede der Determinante entspringen nun alle übrigen Glieder derselben durch Permutation der unteren Indices der Elemente c. Bei diesem Verfahren werden aber unter dem Summenzeichen nur die oberen Indices der Elemente a permutirt, während die Indices der Elemente b ganz ungeändert bleiben. Man hat daher:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n}\left[\left(\Sigma \pm a_{m_0}^0\, a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n\right) . \, b_{m_0}^0\, b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n\right].$$

Die Determinante $\Sigma \pm a_{m_0}^0\, a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n$ verschwindet nach (5), so oft zwei von den Indices $m_0, m_1 \ldots m_n$ einander gleich sind, und mit ihr die entsprechenden Glieder der Summe des rechten Theiles der letzten Gleichung. Da also in dieser Summe die Glieder fehlen, in welchen zwei oder mehrere Indices $m_0, m_1 \ldots m_n$ einander gleich sind, so bedeuten m_0, $m_1 \ldots m_n$ nur die Zahlen $0, 1 \ldots n$ in irgend einer Reihenfolge.

Die Determinante $\Sigma \pm a_{m_0}^0\, a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n$ ist aber unter dieser Voraussetzung nach (4) gleich $\pm \Sigma \pm a_0^0\, a_1^1 \ldots a_n^n$, je nachdem die Permutation $m_0\, m_1 \ldots m_n$ aus der Permutation $0\, 1 \ldots n$ durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permu-

tationen zweier Indices hervorgegangen ist. Setzt man demnach für die genannte Determinante ihren zuletzt angegebenen Werth in die letzte Gleichung und wirft das $\pm$ Vorzeichen dieses Werthes auf das Product $b^0_{m_0}\, b^1_{m_1} \dots b^n_{m_n}$, so erhält man:

$$\Sigma \pm c^0_0\, c^1_1 \dots c^n_n = \Sigma \pm a^0_0\, a^1_1 \dots a^n_n \,.\, \Sigma_{m_0 m_1 \dots m_n} \pm b^0_{m_0}\, b^1_{m_1} \dots b^n_{m_n} \,.$$

Da nun $m_0, m_1 \dots m_n$, wie man gesehen hat, die Zahlen $0, 1 \dots n$ in irgend welcher Reihenfolge bedeuten, und das Product $b^0_{m_0}\, b^1_{m_1} \dots b^n_{m_n}$ in der Gleichung das positive oder negative Vorzeichen hat, je nachdem die Permutation $m_0\, m_1 \dots m_n$ aus der Permutation $0\; 1 \dots n$ durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen zweier Indices hervorgegangen ist, so ist $\Sigma_{m_0 m_1 \dots m_n} \pm b^0_{m_0}\, b^1_{m_1} \dots b^n_{m_n} = \Sigma \pm b^0_0\, b^1_1 \dots b^n_n$, und man hat:

$$\Sigma \pm c^0_0\, c^1_1 \dots c^n_n = \Sigma \pm a^0_0\, a^1_1 \dots a^n_n \,.\, \Sigma \pm b^0_0\, b^1_1 \dots b^n_n \,.$$

Um eine specielle Anwendung des eben bewiesenen Multiplications-Theoremes gegenwärtig zu haben, werden wir demnächst ein algebraisches Problem ausführen, dessen Lösung abhängt von einer kubischen Gleichung in gleicher Form als das spätere Problem der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung, und welches auch der Analysis in einzelnen Fällen treffliche Dienste leistet.

Es ist nämlich nach (31):

$$(32) \dots \quad \begin{vmatrix} p, & q, & r \\ p', & q', & r' \\ p'', & q'', & r'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix}$$

unter Voraussetzung der Substitutionen:

$$(33) \quad \begin{array}{ll} p = ax + by + cz & p' = ax' + by' + cz' \\ q = a'x + b'y + c'z & q' = a'x' + b'y' + c'z' \\ r = a''x + b''y + c''z & r' = a''x' + b''y' + c''z' \end{array}$$

$$(34) \dots\dots \quad \begin{array}{l} p'' = ax'' + by'' + cz'' \\ q'' = a'x'' + b'y'' + c'z'' \\ r'' = a''x'' + b''y'' + c''z'' \end{array}$$

Da die 27 Grössen, woraus diese Gleichungen zusammengesetzt sind, irgend welche sein können, wenn sie nur den

Gleichungen genügen, so wollen wir annehmen, dass x'', y'', z'' gegebene lineare Functionen der Variabeln x, y, z seien:

$$(35) \quad \begin{aligned} x'' &= a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z \\ y'' &= a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z \\ z'' &= a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z \end{aligned}$$

Unter dieser Annahme werden nach (34) p'', q'', r'' ebenfalls lineare Functionen der Variabeln x, y, z und nach (33) lineare Functionen der Variabeln p, q, r von der Form:

$$(36) \quad \begin{aligned} p'' &= b_{00}p + b_{01}q + b_{02}r \\ q'' &= b_{10}p + b_{11}q + b_{12}r \\ r'' &= b_{20}p + b_{21}q + b_{22}r \end{aligned}$$

und man sieht, wie in (32) eine homogene Function der zweiten Ordnung von den Variabeln x, y, z, in Determinantenform gegeben und mit einem Factor multiplicirt, durch die Substitutionen (33) und (34) übergeht in eine homogene Function der zweiten Ordnung von den Variabeln p, q, r von gleicher Determinanten-Form.

Die Coefficienten $b_{\varkappa\lambda}$ in (36) hängen allein ab von den gegebenen Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ in (35) und den neun Substitutionscoefficienten $a\ b\ c\ a'$ . ., über welche die Verfügung frei steht. Man kann daher die Frage stellen, und dieses ist das angekündigte Problem, ob die neun Substitutionscoefficienten sich so bestimmen lassen, dass die Gleichungen (36) die Gestalt erhalten:

$$(37) \quad p'' = \lambda p, \quad q'' = \lambda' q, \quad r'' = \lambda'' r.$$

Die Entscheidung der beregten Frage beruht darauf, ob sich die Gleichungen (34) durch die Substitutionen (37), (33) und (35) als identische Gleichungen darstellen lassen, wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda\,(ax + by + cz) &\equiv a\,(a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z) \\ &\quad + b\,(a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z) + \ldots \\ \lambda'\,(a'x + b'y + c'z) &\equiv a'\,(a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z) \\ &\quad + b'\,(a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z) + \ldots \\ \lambda''(a''x + b''y + c''z) &\equiv a''(a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z) \\ &\quad + b''(a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z) + \ldots \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen wird eine identische unter den Bedingungen:

$$(38) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} &(a_{00} - \lambda)\, a + a_{10}\, b + a_{20} c = 0\,, \\ &a_{01} a + (a_{11} - \lambda)\, b + a_{21} c = 0\,, \\ &a_{02} a + a_{12}\, b + (a_{22} - \lambda) c = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingungen für die beiden folgenden identischen Gleichungen erhält man aus (38), wenn man den zu bestimmenden Grössen λ, a, b, c den Index $'$ oder den Index $''$ anhängt.

Eliminirt man nun a, b, c aus (38), so erhält man die in λ kubische Gleichung:

$$(39) \ldots \quad \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{10}, & a_{20} \\ a_{01}, & a_{11} - \lambda, & a_{21} \\ a_{02}, & a_{12}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

deren Wurzeln eben die zu bestimmenden Grössen λ, λ', λ'' sind.

Die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten $a:b:c$ sind aus den Gleichungen (38) zu berechnen. Die Verhältnisse der übrigen Substitutionscoefficienten ergeben sich aus den analogen Gleichungen. Im Uebrigen bleiben die Substitutionscoefficienten unbestimmt. Nur ihre Verhältnisse sind in der angegebenen Weise bestimmt.

Die angeregte Frage ist hiermit bejahend entschieden und wir drücken das Resultat unserer Untersuchung als Satz aus wie folgt:

(40)*) . . . Wenn x'', y'', z'' gegebene lineare Functionen der Variabeln x, y, z sind von der Form (35), so lassen sich drei Grössen λ, λ', λ'' als Wurzeln einer kubischen Gleichung (39) und demnächst die 9 Substitutionscoefficienten a, b, c, a' . . durch (38) in den

---

*) Von dem Satze (40) wollen wir eine Anwendung machen auf die Transformation und Integration der Jacobischen Differentialgleichung. Crelle's Journal für Mathematik. Bd. 24. p. 1.

Es hat diese Differentialgleichung die Form:

$$- A\, d\eta + B\, d\xi + C\, (\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) = 0,$$

Substitutionen (33) der Art bestimmen, dass man auf Grund dieser Substitutionen hat:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ p', & q', & r' \\ \lambda p, & \lambda' q, & \lambda'' r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

---

wenn man darin A, B, C gegebene lineare Functionen der Variabeln bedeuten lässt:

$$A = a_{00}\xi + a_{01}\eta + a_{02},$$
$$B = a_{10}\xi + a_{11}\eta + a_{12},$$
$$C = a_{20}\xi + a_{21}\eta + a_{2}.$$

In Determinantenform stellt sich die Jacobische Differentialgleichung so dar:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ d\xi & d\eta & 0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher Form wir auch die Gleichung in dem Folgenden als die gegebene betrachten wollen.

Setzen wir nun, indem wir drei Variable an Stelle der zwei Variabeln einführen durch $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$ und bezeichnen die Differentiale mit $dx = x'$, $dy = y'$, $dz = z'$, so erhält die Differentialgleichung mit Rücksicht auf die Bezeichnung (35) die Gestalt:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ zx' - xz', & zy' - yz', & 0 \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

Multiplicirt man die erste Horizontalreihe der Elemente mit z' und addirt sie zur zweiten Horizontalreihe, so geht die Gleichung nach (30) und mit Unterdrückung des Factors z über in:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nach dem Satze (40) kann man diese Differentialgleichung, indem man für die Variabeln x, y, z die Variabeln p, q, r einführt und setzt $dp = p'$, $dq = q'$, $dr = r'$, durch die Substitutionen (33) überführen in die Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ p', & q', & r' \\ \lambda p, & \lambda' q, & \lambda'' r \end{vmatrix} = 0,$$

Das oben bewiesene Multiplications-Theorem dient unter Anderem zur Transformation gewisser Functionen-Formen, die wir jetzt vorführen werden.

Es seien:

$$a^0, \quad a^1, \quad . \; . \; . \quad a^n$$

irgend welche gegebene $(n+1)$ Functionen von einer gleichen Zahl der Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$. Wir substituiren für diese $(n+1)$ Variable eben soviel neue Variable $y_0, y_1 \ldots y_n$, indem wir die ersteren gleichsetzen irgend welchen gegebenen Functionen der neuen Variabeln, was wir ausdrücken wollen mit den symbolischen Gleichungen:

$$x_0 = f_0(y), \quad x_1 = f_1(y) \quad . \quad . \quad x_n = f_n(y).$$

In dieser Voraussetzung hat jede der oben angegebenen Functionen a^λ zwei Arten von partiellen Differentialquotienten aufzuweisen, deren Symbole sind:

$$\frac{\partial a^\lambda}{\partial x_\varkappa}, \quad \frac{\partial a^\lambda}{\partial y_\varkappa}.$$

Wenn wir dieselben bezeichnen respective mit:

$$a_\varkappa^\lambda, \qquad c_\varkappa^\lambda,$$

so lehrt die Differentialrechnung, dass man hat:

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\lambda \frac{\partial x_0}{\partial y_\varkappa} + a_1^\lambda \frac{\partial x_1}{\partial y_\varkappa} + \ldots a_n^\lambda \frac{\partial x_n}{\partial y_\varkappa}.$$

---

welche entwickelt und durch $p\,q\,r$ dividirt sich so darstellt:

$$(\lambda' - \lambda'')\frac{p'}{p} + (\lambda'' - \lambda)\frac{q'}{q} + (\lambda - \lambda')\frac{r'}{r} = 0.$$

Man sieht sogleich, dass das Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$p^{(\lambda' - \lambda'')} \,.\, q^{(\lambda'' - \lambda)} \,.\, r^{(\lambda - \lambda')} = \text{Const.}$$

Setzt man nun für p, q, r die Werthe (33) und wie vorhin $x = z\xi$, $y = z\eta$, so hebt sich z ganz fort, und man erhält das Integral der Jacobischen Differentialgleichung in der Gestalt:

$$(a\xi + b\eta + c)^{(\lambda' - \lambda'')} \,.\, (a'\xi + b'\eta + c')^{(\lambda'' - \lambda)} \,.\, (a''\xi + b''\eta + c'')^{(\lambda - \lambda')} = \text{Const.}$$

Die Exponenten λ, λ', λ'' in dieser Integralgleichung sind die Wurzeln der kubischen Gleichung (39), die Verhältnisse der Coefficienten $a\,b\,c\,a' \ldots$ sind aus den Gleichungen (38) zu berechnen. Die Coefficienten selbst haben nur durch ihre Verhältnisse Einfluss auf die Integralgleichung, da man für die willkürliche Constante der Integration auch jede andere setzen kann.

Setzen wir nun $\frac{\partial x_\mu}{\partial y_\varkappa} = b_\mu^\varkappa$, so wird die letzte Gleichung gerade die Bedingungsgleichung des Multiplications-Theoremes (31), nach welchem man hat:

$$(41) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma \pm \frac{\partial a^0}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial a^1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial a^n}{\partial y_n} =$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial a^0}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial a^1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial a^n}{\partial x_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial x_0}{\partial y_0} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_n}.$$

Determinanten-Ausdrücke, wie diejenigen, woraus die letzte Gleichung zusammengesetzt ist, treten auf bei der Transformation vielfacher Integrale. Man bezeichnet sie mit einem gemeinsamen Namen.

Sind nämlich m Functionen von einer gleichen Zahl Variabeln gegeben, so nennt man die aus d. n m^2 ersten partiellen Differentialquotienten dieser Functionen gebildete Determinante Functional-Determinante. Transformirt man die m gegebenen Functionen durch irgend welche Substitutionen einer gleichen Zahl neuer Variabeln, so hat man neben der genannten Functional-Determinante eine Functional-Determinante der Substitutionen und eine Functional-Determinante der gegebenen, aber transformirten Function. Zwischen ihnen besteht die Gleichung (41), welche sich zu weiterem Gebrauch in Worten so wiedergeben lässt:

(42) . . . Die Functional-Determinante gegebener transformirter Functionen ist gleich dem Product aus der Functional-Determinante der Substitutionen und der Functional-Determinante der gegebenen Functionen.

Nach dem Multiplications-Theorem (31) lässt sich das Product zweier Determinanten als eine Determinante darstellen. Die partiellen Differentialquotienten der letzteren, nach ihren Elementen genommen, lassen sich durch die partiellen Differentialquotienten der Factoren ausdrücken, wie der folgende Satz lehrt:

(43) . . . Wenn $C = \Sigma \pm c_0{}^0 c_1{}^1 \ldots c_n^n$ und

$$A = \Sigma \pm a_0{}^0 a_1{}^1 \ldots a_n^n, \qquad B = \Sigma \pm b_0{}^0 b_1{}^1 \ldots b_n^n,$$

so ist unter der Bedingung:

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \ldots a_n^\varkappa b_n^\lambda$$

nicht allein $C = A \,.\, B$, sondern auch:

$$\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda} = \frac{\partial A}{\partial a_0^\varkappa} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_0^\lambda} + \frac{\partial A}{\partial a_1^\varkappa} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_1^\lambda} + \ldots \frac{\partial A}{\partial a_n^\varkappa} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_n^\lambda}.$$

Auf Grund von (7) und (10) stellt sich die Determinante C so dar:

$$C = \frac{\partial C}{\partial c_0^\lambda} c_0^\lambda + \frac{\partial C}{\partial c_1^\lambda} c_1^\lambda + \ldots \frac{\partial C}{\partial c_n^\lambda} c_n^\lambda.$$

Da das Element b_μ^λ nur in den Elementen $c_0^\lambda, c_1^\lambda \ldots c_n^\lambda$ der Determinante $C = A \,.\, B$ enthalten ist, so erhält man durch Differentiation der angegebenen Gleichung nach b_μ^λ:

$$A \frac{\partial B}{\partial b_\mu^\lambda} = \frac{\partial C}{\partial c_0^\lambda} a_\mu^0 + \frac{\partial C}{\partial c_1^\lambda} a_\mu^1 + \ldots \frac{\partial C}{\partial c_n^\lambda} a_\mu^n.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $A_\mu^\varkappa$, setzt hierauf für μ nach einander die Zahlen $0\ 1 \ldots n$ und addirt, so verschwinden nach (9) und (7) alle Glieder des rechten Theiles der Summe mit Ausnahme desjenigen Gliedes, welches den Factor $\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda}$ enthält, und der andere wird nach (7) gleich A. Wir erhalten demnach:

$$A \left\{ A_0^\varkappa \frac{\partial B}{\partial b_0^\lambda} + A_1^\varkappa \frac{\partial B}{\partial b_1^\lambda} + \ldots A_n^\varkappa \frac{\partial B}{\partial b_n^\lambda} \right\} = A \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda},$$

eine Gleichung, welche mit Unterdrückung des Factors A auf beiden Seiten und Einführung der Bezeichnung (10) den letzten Theil des Satzes (43) beweiset.

Die Bemerkung, dass die letzte Gleichung des Satzes (43) gerade so zusammengesetzt ist aus den partiellen Differentialquotienten der Determinanten C, A, B, wie die Bedingungsgleichung desselben Satzes aus den Elementen derselben Determinanten, wird nicht allein zur leichteren Auffassung des Satzes beitragen, sondern auch Gelegenheit geben, weitere Sätze aufzustellen.

Wir wollen nicht unterlassen, auch darauf aufmerksam zu machen, dass sich der partielle Differentialquotient $\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda}$

als die Summe von Quadraten darstellt, wenn die Elemente der Determinante A den entsprechenden Elementen der Determinante B gleich werden.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass der Satz (43) sich auch auf höhere Ordnungen der Differentialquotienten der drei Determinanten erweitern lässt.

Achte Vorlesung.

Ganze homogene Functionen. Anwendungen der Determinanten.

Von gleicher Wichtigkeit als die Determinanten sind die Eigenschaften der ganzen homogenen Functionen für die analytische Geometrie. Diese Eigenschaften zu entwickeln, insofern sie in dem Folgenden eine Anwendung finden, wird zunächst unsere Aufgabe sein.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der ganzen homogenen Function:

(1) . . . . $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$

von $(n+1)$ Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$ vom $p$ten Grade, dass:

(2) . . . $t^p f(x_0, x_1, \ldots x_n) = f(x_0 t, x_1 t, \ldots x_n t)$.

Denn wenn eine ganze Function (1) der Gleichung (2) genügt, so ist sie zugleich eine homogene Function.

Die Gleichung (2) hat man als eine identische Gleichung zu betrachten, in welcher die beiden Theile der Gleichung sich nur in der Form von einander unterscheiden.

Differentiirt man daher die Gleichung (2) nach t, und setzt nach der Differentiation $t = 1$, so erhält man die identische Gleichung:

(3) $p \cdot f(x_0, x_1, \ldots x_n) = x_0 f'(x_0) + x_1 f'(x_1) + \ldots x_n f'(x_n)$.

Die zweimalige Differentiation nach t ergiebt, wenn man wieder $t = 1$ setzt, folgende identische Gleichung:

$$(4) \ldots\ldots \quad p(p-1) f(x_0, x_1, \ldots x_n) =$$
$$= x_0^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots 2 \,.\, x_0 x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} + \ldots$$

Durch dreimalige, viermalige Differentiation lassen sich aus (2) in gleicher Weise neue identische Gleichungen herleiten, auf welche wir weiter kein Gewicht legen, weil wir von ihnen im Folgenden keine Anwendung machen werden.

Es seien nun $a^0, a^1, \ldots a^n$, $(n+1)$ gegebene ganze homogene Functionen der Variabeln $x_0, x_1, \ldots x_n$ respective von den Graden $p_0, p_1, \ldots p_n$. Bezeichnet man die Differentialquotienten dieser Functionen, nach den $(n+1)$ Variabeln genommen, der Kürze wegen mit dem Zeichen $\frac{\partial a^\lambda}{\partial x_\varkappa} = a_\varkappa^\lambda$, so hat man nach (3) das System identischer Gleichungen:

$$(5) \ldots \quad \begin{aligned} p_0 a^0 &= a_0^0 x_0 + a_1^0 x_1 + \ldots a_n^0 x_n \\ p_1 a^1 &= a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + \ldots a_n^1 x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n a^n &= a_0^n x_0 + a_1^n x_1 + \ldots a_n^n x_n. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man als lineare betrachten, wenn man die Variabeln $x_0, x_1, \ldots x_n$, wie sie zu Tage treten, nicht wie sie in den Functionen $a_0, a_1, \ldots a_n$ und in ihren Differentialquotienten enthalten sind, als die Unbekannten ansieht. In dieser Voraussetzung haben sie die Form der Gleichungen (17) der vorhergehenden Vorlesung, welche durch Auflösung die Gleichungen (19) ergaben.

Löset man die identischen Gleichungen (5) nach den bezeichneten Unbekannten auf, so erhält man ebenfalls identische Gleichungen, die wir in folgender zusammenfassen können:

$$(6) \ldots \quad A \,.\, x_\varkappa = A_\varkappa^0 \, p_0 \, a^0 + A_\varkappa^1 \, p_1 \, a^1 + \ldots A_\varkappa^n \, p_n \, a^n.$$

In ihr haben A und $A_\varkappa^\lambda$ die Bedeutung einer Determinante und ihres partiellen Differentialquotienten, nämlich:

$$(7) \ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad A_\varkappa^\lambda = \frac{\partial A}{\partial a_\varkappa^\lambda}$$

Die Determinante A ist unter den angegebenen Voraussetzungen eine Functional-Determinante oder präciser die Determinante der Functionen $a^0, a^1 \ldots a^n$, aus deren Differentialquotienten sie zusammengesetzt ist. Sie verschwindet nach (6) für dasjenige System Werthe der Variabeln, für welches die Functionen verschwinden, aus deren partiellen Differentialquotienten sie zusammengesetzt ist. Man hat daher den Satz:

(8) . . . Wenn $(n+1)$ ganze homogene Functionen von eben so vielen Variabeln für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden, so verschwindet auch die Determinante dieser Functionen für dasselbe System Werthe der Variabeln.

Durch Differentiation der identischen Gleichung (6) nach $x_\varkappa$ erhält man die ebenfalls identische Gleichung:

$$A + \frac{\partial A}{\partial x_\varkappa} x_\varkappa = A_\varkappa^0 p_0 a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 p_1 a_\varkappa^1 + \ldots A_\varkappa^n p_n a_\varkappa^n + \frac{\partial A_\varkappa^0}{\partial x_\varkappa} p_0 a^0 + \frac{\partial A_\varkappa^1}{\partial x_\varkappa} p_1 a^1 + \ldots \frac{\partial A_\varkappa^n}{\partial x_\varkappa} p_n a^n.$$

Zieht man von dieser Gleichung die mit p_0 multiplicirte Gleichung (6):

$$A = A_\varkappa^0 a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 a_\varkappa^1 + \ldots A_\varkappa^n a_\varkappa^n$$

aus der vorhergehenden Vorlesung ab, so erhält man:

$$(9) \ldots \quad A(1-p_0) + \frac{\partial A}{\partial x_\varkappa} x_\varkappa = A_\varkappa^1 a_\varkappa^1 (p_1 - p_0) + \ldots A_\varkappa^n a_\varkappa^n (p_n - p_0) + \frac{\partial A_\varkappa^0}{\partial x_\varkappa} p_0 a^0 + \frac{\partial A_\varkappa^1}{\partial x_\varkappa} p_1 a^1 + \ldots \frac{\partial A_\varkappa^n}{\partial x_\varkappa} p_n a^n.$$

Differentiirt man dagegen die Gleichung (6) nach x_λ, so erhält man, wenn man die mit p_0 multiplicirte Gleichung (8):

$$0 = A_\varkappa^0 a_\lambda^0 + A_\varkappa^1 a_\lambda^1 + \ldots A_\varkappa^n a_\lambda^n$$

der letzten Vorlesung abzieht:

$$(10) \ldots \quad \frac{\partial A}{\partial x_\lambda} x_\varkappa = A_\varkappa^1 a_\lambda^1 (p_1 - p_0) + \ldots A_\varkappa^n a_\lambda^n (p_n - p_0) + \frac{\partial A_\varkappa^0}{\partial x_\lambda} p_0 a^0 + \frac{\partial A_\varkappa^1}{\partial x_\lambda} p_1 a^1 + \ldots + \frac{\partial A_\varkappa^n}{\partial x_\lambda} p_n a^n.$$

Wenn nun für ein System Werthe der Variabeln die Functionen $a^0, a^1, \ldots a^n$ sämmtlich verschwinden, so erhält man, da unter dieser Voraussetzung auch A verschwindet, für dieses System Werthe aus (9) und (10) die, freilich nicht mehr identischen, Gleichungen:

$$(11) \ldots . \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_\varkappa} x_\varkappa &= A^1_\varkappa a^1_\varkappa (p_1 - p_0) + \ldots A^n_\varkappa a^n_\varkappa (p_n - p_0), \\ \frac{\partial A}{\partial x_\lambda} x_\varkappa &= A^1_\varkappa a^1_\lambda (p_1 - p_0) + \ldots A^n_\varkappa a^n_\lambda (p_n - p_0), \end{aligned}$$

deren rechte Seiten verschwinden, wenn $p_0 = p_1 = \ldots = p_n$. Daraus folgt der Satz:

(12) . . . Wenn $(n+1)$ ganze homogene Functionen von eben so vielen Variabeln und von gleichen Graden für ein System Werthe der Variabeln verschwinden, so verschwinden auch die Determinante dieser Functionen und ihre ersten partiellen Differentialquotienten für dasselbe System Werthe der Variabeln.

Sind dagegen $p_0 = p_1 = \ldots = p_{n-1}$, und von p_n verschieden, so hat man nach (11):

$$(13) \ldots \ldots . \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_\varkappa} &= a^n_\varkappa \, . \, A^n_\varkappa \, \frac{(p_n - p_0)}{x_\varkappa}, \\ \frac{\partial A}{\partial x_\lambda} &= a^n_\lambda \, . \, A^n_\varkappa \, \frac{(p_n - p_0)}{x_\varkappa}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen den Satz:

(14) . . . Wenn von $(n+1)$ ganzen homogenen Functionen eben so vieler Variabeln n Functionen von demselben Grade sind und es verschwinden alle $(n+1)$ Functionen für ein System Werthe der Variabeln, so sind für dieses System Werthe der Variabeln die partiellen Differentialquotienten der Determinante der $(n+1)$ Functionen proportional den entsprechenden partiellen Differentialquotienten der ungleichgradigen Function.

Mit derselben Leichtigkeit lässt sich endlich aus den Gleichungen (11) der allgemeinere Satz ablesen:

(15) . . . Wenn von $(n+1)$ ganzen homogenen Functionen $a^0, a^1, \ldots a^n$ von eben so vielen Variabeln die Functionen $a^0, a^1, \ldots a^{m-1}$ von demselben Grade sind und es verschwinden sämmtliche $(n+1)$ Functionen für ein System Werthe der Variabeln, so hat man für dieses System Werthe der Variabeln die Gleichungen:

$$\frac{\partial A}{\partial x_\lambda} = P_m \frac{\partial a^m}{\partial x_\lambda} + P_{m+1} \frac{\partial a^{m+1}}{\partial x_\lambda} + \ldots P_n \frac{\partial a^n}{\partial x_\lambda},$$

in welchen die Ausdrücke $P_m, P_{m+1}, \ldots P_n$ unabhängig sind von dem besonderen Werthe von λ.

Wir legen auf diese vier Sätze deshalb ein Gewicht, weil sie sich eignen, einem fühlbaren Mangel in der Eliminations-Theorie, freilich nur in einzelnen Fällen, abzuhelfen. Es haben nämlich Bezout und Sylvester dargethan, wie die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen irgend welcher Grade sich zurückführen lässt auf die Elimination mehrerer Unbekannten aus linearen Gleichungen. Das Resultat der Elimination enthält niemals einen überflüssigen Factor. Die Versuche, dieses Eliminationsverfahren auf mehr als zwei Gleichungen auszudehnen, haben den gewünschten Erfolg nicht gehabt, ausser in speciellen Fällen. Das Resultat ist im Allgemeinen nicht rein, sondern immer mit einem überflüssigen Factor angethan.

Die speciellen Aufgaben der Elimination, welche uns in dieser und der folgenden Vorlesung begegnen, werden wir mit Hülfe der hervorgehobenen Sätze lösen können ohne Einmischung eines überflüssigen Factors.

Als ein Beispiel zur Anwendung des Satzes (8) wählen wir die Aufgabe:

(16) . . . Die Bedingungsgleichung zu finden, welche die homogenen Coordinaten von vier Punkten erfüllen müssen, wenn die Punkte auf einer und derselben Ebene liegen.

Es seien $(x_0\, y_0\, z_0\, p_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1\, p_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2\, p_2)$, $(x_3\, y_3\, z_3\, p_3)$ die Coordinaten der vier Punkte und

$$ux + vy + wz + rp = 0$$

die Gleichung der Ebene. Alsdann hat man die Bedingungen:

$$\begin{aligned} ux_0 + vy_0 + wz_0 + rp_0 &= 0 \\ ux_1 + vy_1 + wz_1 + rp_1 &= 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + rp_2 &= 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + rp_3 &= 0. \end{aligned}$$

Man hat hier also vier lineare homogene Functionen der Variabeln u, v, w, r, welche für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden. Der Satz (8) giebt die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & p_0 \\ x_1, & y_1, & z_1, & p_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & p_2 \\ x_3, & y_3, & z_3, & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man drückt dieselbe durch rechtwinklige Coordinaten der vier Punkte aus, indem man $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$ setzt:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aber dieses ist eine andere Form für dieselbe Bedingungsgleichung, die wir in der ersten Vorlesung unter (18) durch $6\,\Pi = 0$ ausgedrückt haben. Um den linken Theil der zuletzt angeführten Gleichung (18) auf die Form von $6\,\Pi$ zurückzuführen, hat man mehrere Sätze der siebenten Vorlesung in Anwendung zu bringen. Derselbe erhält durch mehrmalige Anwendung des Satzes (4) schliesslich die Gestalt:

$$-\begin{vmatrix} 1, & x_0, & y_0, & z_0 \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck geht durch wiederholte Anwendung des Satzes (30) über in:

$$-\begin{vmatrix} 1, & x_0, & y_0, & z_0, \\ 0, & x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ 0, & x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ 0, & x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

und erhält nach (14) die Gestalt:

$$(19) \quad -\begin{vmatrix} x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = -6\,\Pi$$

Es ist dieses derselbe Ausdruck von $6\,\Pi$ in (15) der ersten Vorlesung nach den dort folgenden Substitutionen (17).

Wir haben in der dritten Vorlesung die Bedingungsgleichung (15) der Involution aufgestellt:

$$(20) \quad (\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0$$

als das Resultat der Elimination von $\lambda\mu$ und $\frac{1}{2}(\lambda + \mu)$ aus den vorhergehenden Gleichungen, welche sind:

$$(21) \ldots \quad \begin{aligned} \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0, \\ \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0, \\ \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2\mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Es soll sich jetzt nicht darum handeln, das Resultat der Elimination (20) von dort zu verificiren, sondern unmittelbar durch Elimination der genannten Grössen aus den Gleichungen (21) die Form der Bedingungsgleichung (20) zu entwickeln. Diese Form ändert sich, wenn man λ_0 mit μ_0, oder λ_1 mit μ_1, oder λ_2 mit μ_2 vertauscht, obwohl die Vertauschung der Natur der Sache nach erlaubt ist. Ausserdem kennt man noch drei andere einfache Formen derselben Bedingung. Wir stellen uns demnach die Aufgabe:

(22) . . . Durch Elimination der Unbekannten $\lambda\mu$ und $\frac{1}{2}(\lambda + \mu)$ aus den Gleichungen (21) die sieben Formen der Bedingungsgleichung der Involution abzuleiten.

Wenn man die Gleichung (21) homogen macht und mit Δ die Determinante bezeichnet:

$$(23) \quad \ldots \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1, & -(\lambda_0+\mu_0), & \lambda_0\mu_0 \\ 1, & -(\lambda_1+\mu_1), & \lambda_1\mu_1 \\ 1, & -(\lambda_2+\mu_2), & \lambda_2\mu_2 \end{vmatrix},$$

so sieht man, dass nach (8) die Bedingungsgleichung der Involution ist: $\Delta = 0$, und dass die vorgelegte Aufgabe darin ihre Erledigung findet, dass man die Determinante Δ, multiplicirt mit irgend welchen Factoren, auf sieben verschiedene Arten ausdrückt.

Die Determinante A in (3) der siebenten Vorlesung entstand aus der Entwickelung des Productes P, indem man die Exponenten der Elemente obere Indices bedeuten liess. Die Determinante A geht darum wieder in das Product P über, wenn man in (3) die oberen Indices der Elemente als Exponenten betrachtet.

Nimmt man daher an, dass in der Determinante:

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad L = \begin{vmatrix} \lambda_0^2, & \lambda_0^1, & \lambda_0^0 \\ \lambda_1^2, & \lambda_1^1, & \lambda_1^0 \\ \lambda_2^2, & \lambda_2^1, & \lambda_2^0 \end{vmatrix}$$

die oberen Indices Exponenten seien, eine Annahme, die wir auch im Folgenden aufrecht erhalten werden, so hat man:

$$(25) \quad \ldots \quad L = -(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_1).$$

Multiplicirt man die beiden Determinanten, so erhält man nach dem Multiplications-Theoreme:

$$(26) \quad \Delta L = \begin{vmatrix} (\lambda_0-\lambda_0)(\lambda_0-\mu_0), & (\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_1-\mu_0), & (\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_2-\mu_0) \\ (\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\mu_1), & (\lambda_1-\lambda_1)(\lambda_1-\mu_1), & (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\mu_1) \\ (\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\mu_2), & (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\mu_2), & (\lambda_2-\lambda_2)(\lambda_2-\mu_2) \end{vmatrix}$$

das Product in Form einer Determinante, in welcher die Elemente der Diagonale verschwinden. Berücksichtiget man dieses und entwickelt die Determinante, so erhält sie das in (25) angegebene Product L als Factor. Unterdrückt man diesen Factor auf beiden Seiten der Gleichung (26), so erhält man:

$$(27) \quad -\Delta = (\lambda_0-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_2-\mu_0) + (\mu_0-\lambda_1)(\mu_1-\lambda_2)(\mu_2-\lambda_0).$$

Da die Determinante Δ in (23) ungeändert bleibt, wenn man in ihr λ_0 mit μ_0, oder λ_1 mit μ_1, oder λ_2 mit μ_2 vertauscht, so erhält man aus (27) durch diese Vertauschungen:

$$
(28)\quad
\begin{aligned}
-\Delta &= (\mu_0-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_2-\lambda_0)+(\lambda_0-\lambda_1)(\mu_1-\lambda_2)(\mu_2-\mu_0),\\
-\Delta &= (\mu_0-\mu_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\mu_2-\lambda_0)+(\lambda_0-\lambda_1)(\mu_1-\mu_2)(\lambda_2-\mu_0),\\
-\Delta &= (\mu_0-\lambda_1)(\mu_1-\mu_2)(\lambda_2-\lambda_0)+(\lambda_0-\mu_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\mu_2-\mu_0).
\end{aligned}
$$

Um die drei anderen Formen für Δ abzuleiten, multipliciren wir diese Determinante mit der Determinante M:

$$
(29) \;\ldots\ldots\; M = \begin{vmatrix} \lambda^2, & \lambda^1, & \lambda^0 \\ \lambda_0^2, & \lambda_0^1, & \lambda_0^0 \\ \mu_0^2, & \mu_0^1, & \mu_0^0 \end{vmatrix},
$$

in welcher die oberen Indices der Elemente Exponenten sein sollen. In dieser Voraussetzung ist:

$$
(30) \;\ldots\; M = -(\lambda_0-\mu_0)(\mu_0-\lambda)(\lambda-\lambda_0),
$$

und das Product der beiden Determinanten (23) und (29) stellt sich als eine Determinante dar wie folgt:

$$
(31)\; \Delta M = \begin{vmatrix}
(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0), & (\lambda_0-\lambda_0)(\lambda_0-\mu_0), & (\mu_0-\lambda_0)(\mu_0-\mu_0) \\
(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\mu_1), & (\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\mu_1), & (\mu_0-\lambda_1)(\mu_0-\mu_1) \\
(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\mu_2), & (\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\mu_2), & (\mu_0-\lambda_2)(\mu_0-\mu_2)
\end{vmatrix}.
$$

Da in dieser Determinante die Elemente der ersten Horizontalreihe verschwinden mit Ausnahme des ersten, so hat man nach (12) der vorhergehenden Vorlesung:

$$
\Delta M = (\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0) \begin{vmatrix}
(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\mu_1), & (\mu_0-\lambda_1)(\mu_0-\mu_1) \\
(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\mu_2), & (\mu_0-\lambda_2)(\mu_0-\mu_2)
\end{vmatrix},
$$

und wenn man durch (30) dividirt:

$$
(32)\quad \Delta = \frac{1}{\lambda_0-\mu_0} \begin{vmatrix}
(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\mu_1), & (\mu_0-\lambda_1)(\mu_0-\mu_1) \\
(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\mu_2), & (\mu_0-\lambda_2)(\mu_0-\mu_2)
\end{vmatrix},
$$

oder entwickelt:

$$
\begin{aligned}
(33) \;\ldots\; \Delta = \frac{1}{\lambda_0-\mu_0} \{ & (\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\mu_1)(\mu_0-\lambda_2)(\mu_0-\mu_2) \\
& -(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\mu_2)(\mu_0-\lambda_1)(\mu_0-\mu_1)\}.
\end{aligned}
$$

Da die Determinante Δ nur ihr Vorzeichen ändert, wenn man die Indices 0 und 1 oder 0 und 2 vertauscht, so erhält man durch diese Vertauschungen aus (33) folgende Gleichung:

$$(34)\ldots\quad \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\lambda_1-\mu_1}\Big\{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\mu_2)(\mu_1-\lambda_0)(\mu_1-\mu_0) \\ &\qquad -(\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_1-\mu_0)(\mu_1-\lambda_2)(\mu_1-\mu_2)\Big\} \\ \Delta &= \frac{1}{\lambda_2-\mu_2}\Big\{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_2-\mu_0)(\mu_2-\lambda_1)(\mu_2-\mu_1) \\ &\qquad -(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\mu_1)(\mu_2-\lambda_0)(\mu_2-\mu_0)\Big\}. \end{aligned}$$

Es ist in der sechsten Vorlesung die kürzeste Entfernung R zweier geraden Linien L und L_1 im Raume in der Gleichung (10) ausgedrückt worden. Derselbe Ausdruck stellt sich in Determinantenform so dar:

$$(35)\ldots\quad R = \frac{-1}{\sin(LL_1)}\begin{vmatrix} a_1-a, & b_1-b, & c_1-c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \end{vmatrix}.$$

In demselben bedeuten a, b, c die Coordinaten eines Punktes 0 auf der geraden Linie L, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus sind α, β, γ; und a_1, b_1, c_1 bedeuten die Coordinaten eines Punktes 1 auf der geraden Linie L_1, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind.

Wählen wir nun auf der geraden Linie L_1 beliebig einen Punkt 2 mit den Coordinaten a_2, b_2, c_2, dessen Entfernung von dem Punkte 1 sei l_1 und auf der geraden Linie L einen Punkt 3 mit den Coordinaten a_3, b_3, c_3, dessen Entfernung von dem Punkte 0 sei l, so haben wir:

$$\begin{aligned} l\alpha &= a_3-a, & l\beta &= b_3-b, & l\gamma &= c_3-c, \\ l_1\alpha_1 &= a_2-a_1, & l_1\beta_1 &= b_2-b_1, & l_1\gamma_1 &= c_2-c_1. \end{aligned}$$

Durch Substitution der Werthe von $\alpha, \beta \,..\, \alpha_1 \,..$ in (35) und Anwendung des Satzes (30) der siebenten Vorlesung, geht jene Gleichung über in:

$$(36)\quad ll_1\, R \sin(LL_1) = \begin{vmatrix} a_1-a, & b_1-b, & c_1-c \\ a_2-a, & b_2-b, & c_2-c \\ a_3-a, & b_3-b, & c_3-c \end{vmatrix}.$$

Da der rechte Theil dieser Gleichung den sechsfachen Inhalt des Tetraeders 0 1 2 3 ausdrückt, so haben wir den Satz bewiesen:

(37) . . . Der sechsfache Inhalt eines Tetraeders ist gleich dem Product zweier gegenüberliegenden Kanten, der kürzesten Entfernung und des Sinus des Neigungswinkels derselben beiden Kanten.

(38) . . . . Die Länge der Tangente zu bestimmen, welche von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt gezogen ist.

Es seien die homogene Gleichung des Kegelschnittes $f=0$ und a, b, c die Coordinaten des gegebenen Punktes. Alsdann berührt die von dem gegebenen Punkte an den Kegelschnitt gezogene Tangente in dem Punkte den Kegelschnitt, in welchem die Polare:

$$A \equiv xf'(a) + yf'(b) + zf'(c) = 0$$

den Kegelschnitt trifft. Ist nun r die Länge der Tangente, so hat man die Kreisgleichung:

$$\varphi \equiv (xc - za)^2 + (yc - zb)^2 - r^2c^2z^2 = 0,$$

und es ist die Aufgabe, aus den drei Gleichungen: $f=0$, $\varphi=0$, $A=0$ die homogenen Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes, welche allen drei Gleichungen zugleich genügen, zu eliminiren. Das Resultat der Elimination muss eine in r^2 quadratische Gleichung sein, weil man von dem gegebenen Punkte zwei Tangenten an den Kegelschnitt ziehen kann. Dieses Resultat wird sich in zwei verschiedenen Formen darstellen lassen.

Mit den genannten Functionen verschwindet nach (8) auch ihre Determinante vom zweiten Grade der Variabeln. Man hat daher die sechs Gleichungen, ebenfalls vom zweiten Grade:

$$f=0, \quad \varphi=0, \quad \Delta=0, \quad xA=0, \quad yA=0, \quad zA=0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun die sechs Quadrate und Producte der Variabeln wie aus linearen Gleichungen eliminiren.

Man hat aber auch nach dem Satze (14):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \lambda f'(a), \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \lambda f'(b), \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} = \lambda f'(c), \quad A = 0,$$

und erhält die gesuchte, ebenfalls in r^2 quadratische, Gleichung, wenn man aus diesen in x, y, z, λ linearen homogenen Gleichungen die genannten Grössen eliminirt.

(39) . . . . Wenn die Gleichungen von zwei Kegelschnitten gegeben sind, die Gleichung ihrer vier Schnittpunkte zu bestimmen.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Schnittpunktes der durch ihre Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ gegebenen Kegelschnitte, so ist:

$$A \equiv ux + vy + wz = 0$$

die Gleichung dieses Punktes. Es ist also die Aufgabe, aus den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $A = 0$ die Variabeln x, y, z zu eliminiren und daraus eine homogene Gleichung des vierten Grades in u, v, w abzuleiten.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke mit Δ die Determinante der Functionen f, φ, A, so haben wir die sechs Gleichungen:

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \Delta = 0, \quad xA = 0, \quad yA = 0, \quad zA = 0,$$

aus welchen die Quadrate und Producte der Variabeln sich wie aus linearen Gleichungen eliminiren lassen.

Wir haben aber auch wie vorhin:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \lambda u, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \lambda v, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} = \lambda w, \quad A = 0,$$

woraus die Unbekannten x, y, z, λ linear zu eliminiren sind.

Die Resultante $R = 0$ der Elimination ist vom vierten Grade. Sie lässt sich in vier lineare Factoren zerlegen, und die Coefficienten von u, v, w in einem jeden Factor sind die Coordinaten eines der vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte.

Durch die vier Schnittpunkte lässt sich drei Mal ein Linienpaar legen. Jedes Paar schneidet sich in einem Punkte, einem Diagonalpunkte des Vierecks, dessen Ecken die vier genannten Schnittpunkte sind. Das Viereck hat demnach drei Diagonalpunkte, und wir stellen uns im Anschlusse an die vorhergehende Aufgabe folgende:

(40) . . . Wenn die Ecken eines Viereckes gegeben sind als die Schnittpunkte zweier durch ihre Gleichungen gegebenen Kegelschnitte, die Gleichung der Diagonalpunkte des Viereckes zu bestimmen.

Sind $f=0$ und $\varphi=0$ die homogenen Gleichungen der gegebenen Kegelschnitte, so ist bekanntlich $f+\lambda\varphi=0$ die Gleichung eines jeden Kegelschnittes, der durch die vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte geht. Bei richtiger Bestimmung von λ stellt also die letzte Gleichung auch das Linienpaar dar, welches durch die vier Schnittpunkte geht.

Bezeichnet man mit x, y, z die Coordinaten des Schnittpunktes des Linienpaares, des Diagonalpunktes, so gelten für diesen die Gleichungen:

$$f'(x)+\lambda\varphi'(x)=0\,,\quad f'(y)+\lambda\varphi'(y)=0\,,\quad f'(z)+\lambda\varphi'(z)=0\,,$$
$$A\equiv ux+vy+wz=0\,,$$

wovon die letzte Gleichung den Diagonalpunkt darstellt.

Nach der Elimination von λ hat man nun folgende sechs Gleichungen:

$$f'(y)\varphi'(z)-f'(z)\varphi'(y)=0\,,\quad f'(z)\varphi'(x)-f'(x)\varphi'(z)=0\,,$$
$$f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(z)=0\,,$$
$$xA=0\,,\qquad yA=0\,,\qquad zA=0\,,$$

aus welchen die sechs Quadrate und Producte der Variabeln wie aus linearen Gleichungen zu eliminiren sind, um die Gleichung $S=0$ der Diagonalpunkte vom dritten Grade zu erhalten, welche sich wieder in drei lineare Factoren zerlegen lässt.

An die beiden vorhergehenden Aufgaben, die in den Resultanten $R=0$ und $S=0$ ihre Erledigung gefunden haben, schliesst sich naturgemäss die Aufgabe der Zerfällung dieser Gleichungen in ihre linearen Factoren an.

Man wird finden, dass diese Gleichungen sich so zu einander stellen, wie eine gewöhnliche biquadratische Gleichung zu der bekannten kubischen Gleichung, von welcher die Lösung der ersteren abhängt. Wie nämlich die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sich linear durch die Wurzeln der kubi-

schen Gleichung ausdrücken lassen, so stellen sich auch die Factoren von R als lineare Ausdrücke der Factoren von S dar.

Die Wahrheit dieser Bemerkung liegt jedoch nicht so auf der Hand wie die Lösungen der vorhergehenden beiden Aufgaben; man wird erst zu suchen haben.

(41) . . . Drei gerade Linien L_0, L_1, L_2 sind im Raume gegeben, eine vierte gerade Linie L gleitet an ihnen hin, indem sie jede der gegebenen geraden Linien schneidet; es soll erstens die Relation gefunden werden zwischen den Cosinus der Neigungswinkel, welche die gleitende gerade Linie L mit den Coordinatenaxen bildet und zweitens der geometrische Ort dieser geraden Linie.

Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe beginnen wir mit der Aufstellung der analytischen Bedingungen der Aufgabe. Zuvörderst brauchen wir die Gleichungen der gegebenen geraden Linien L_0, L_1, L_2:

$$(42)\quad \begin{aligned} &a_0-x_0+r_0\alpha_0=0, \quad a_1-x_1+r_1\alpha_1=0, \quad a_2-x_2+r_2\alpha_2=0,\\ &b_0-y_0+r_0\beta_0=0, \quad b_1-y_1+r_1\beta_1=0, \quad b_2-y_2+r_2\beta_2=0,\\ &c_0-z_0+r_0\gamma_0=0, \quad c_1-z_1+r_1\gamma_1=0, \quad c_2-z_2+r_2\gamma_2=0. \end{aligned}$$

Es bedeuten hier, im Anschlusse an die, in (8) und (9) der sechsten Vorlesung eingeführten, einfachen Bezeichnungen, a_0, b_0, c_0 die Coordinaten eines auf der geraden Linie L_0 gegebenen Punktes und x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines beliebigen Punktes 0 auf derselben geraden Linie; die Entfernung der beiden genannten Punkte ist mit r_0 bezeichnet und die gegebenen Cosinus der Winkel, welche L_0 mit den Coor. dinatenaxen bildet, mit α_0, β_0, γ_0. Gleiches gilt von den beiden anderen geraden Linien L_1 und L_2. Um jedoch weitere Bezeichnungen zu ersparen, werden wir fortan unter 012 nicht mehr beliebige, sondern diejenigen Punkte auf den drei gegebenen geraden Linien L_0, L_1, L_2 verstehen, in welchen die gleitende gerade Linie L die gegebene schneidet.

Wenn wir unter diesen Voraussetzungen annehmen, dass x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P seien auf der geraden Linie L, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus mit α, β, γ bezeichnet werden, wenn

wir endlich setzen $P0 = \varrho_0$, $P1 = \varrho_1$, $P2 = \varrho_2$, so haben wir noch folgende neun Bedingungen der Aufgabe, welche die Projectionen der begrenzten geraden Linien ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 in doppelter Ausdrucksweise wiedergeben:

$$
(43) \quad \begin{array}{lll}
x_0 - x + \varrho_0 \alpha = 0, & x_1 - x + \varrho_1 \alpha = 0, & x_2 - x + \varrho_2 \alpha = 0, \\
y_0 - y + \varrho_0 \beta = 0, & y_1 - y + \varrho_1 \beta = 0, & y_2 - y + \varrho_2 \beta = 0, \\
z_0 - z + \varrho_0 \gamma = 0, & z_1 - z + \varrho_1 \gamma = 0, & z_2 - z + \varrho_2 \gamma = 0.
\end{array}
$$

Diese Gleichungen (42) und (43) enthalten sämmtliche Bedingungen der vorgelegten Aufgabe. Aus ihnen ergiebt sich die Lösung des letzten Theiles der Aufgabe unmittelbar. Denn dividiren wir die drei Systeme Gleichungen (42) der Reihe nach durch ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 und ebenso die drei Systeme (43), so haben wir 18 Gleichungen, welche linear und homogen sind in Rücksicht auf folgende 18 Unbekannte:

$$
\begin{array}{lll}
\frac{x_0}{\varrho_0}, \frac{y_0}{\varrho_0}, \frac{z_0}{\varrho_0}; & \frac{x_1}{\varrho_1}, \frac{y_1}{\varrho_1}, \frac{z_1}{\varrho_1}; & \frac{x_2}{\varrho_2}, \frac{y_2}{\varrho_2}, \frac{z_2}{\varrho_2}; \\
\frac{r_0}{\varrho_0}, \frac{r_1}{\varrho_1}, \frac{r_2}{\varrho_2}; & \frac{1}{\varrho_0}, \frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}; & \alpha, \beta, \gamma.
\end{array}
$$

Das Resultat der Elimination ist die verlangte Gleichung $D = 0$ aus Determinantenform, eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z des Punktes P.

Es braucht jedoch nur erwähnt zu werden, dass die Determinante D in 18^2 Elementen zusammengesetzt ist, von welchen allerdings viele verschwinden, um von dem Versuch ihrer Bildung abzuschrecken. Nichts desto weniger kann man, wenn man nur das Bildungsgesetz der Determinanten-Gleichung $D = 0$ im Auge behält, alle Resultate ziehen, welche wir in dem Folgenden anders ableiten werden.

Um die Bedingungsgleichungen (42) und (43) unserer Aufgabe zu concentriren, eliminiren wir die Coordinaten der drei Punkte 0, 1, 2, die wir zur Lösung unserer Aufgabe nicht nöthig haben, wodurch wir erhalten:

$$
(44) \ldots \begin{array}{ll}
a_0 - x + r_0\alpha_0 + \varrho_0\alpha = 0, & a_1 - x + r_1\alpha_1 + \varrho_1\alpha = 0, \\
b_0 - y + r_0\beta_0 + \varrho_0\beta = 0, & b_1 - y + r_1\beta_1 + \varrho_1\beta = 0, \\
c_0 - z + r_0\gamma_0 + \varrho_0\gamma = 0, & c_1 - z + r_1\gamma_1 + \varrho_1\gamma = 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a_2 - x + r_2\alpha_2 + \varrho_2\alpha = 0, \\
b_2 - y + r_2\beta_2 + \varrho_2\beta = 0, \\
c_2 - z + r_2\gamma_2 + \varrho_2\gamma = 0.
\end{array}
$$

Dividiren wir diese drei Systeme Gleichungen der Reihe nach durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$, so werden die neun Gleichungen linear und homogen in Rücksicht auf die neun Unbekannten:

$$\frac{1}{\varrho_0}, \frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}; \quad \frac{r_0}{\varrho_0}, \frac{r_1}{\varrho_1}, \frac{r_2}{\varrho_2}; \quad \alpha, \beta, \gamma.$$

Das Resultat der Elimination $D = 0$ hängt ab von der Determinante D, welche noch aus 81 Elementen zusammengesetzt ist.

Reduciren wir die neun Bedingungsgleichungen (44) auf sechs, indem wir die, für die Lösung des ersten Theiles der Aufgabe nicht erforderlichen Coordinaten x, y, z des Punktes P eliminiren, so erhalten wir:

$$(45) \ldots \begin{aligned} a_1 - a_0 + r_1\alpha_1 - r_0\alpha_0 + (\varrho_1 - \varrho_0)\alpha = 0, \\ a_2 - a_0 + r_2\alpha_2 - r_0\alpha_0 + (\varrho_2 - \varrho_0)\alpha = 0, \\ b_1 - b_0 + r_1\beta_1 - r_0\beta_0 + (\varrho_1 - \varrho_0)\beta = 0, \\ b_2 - b_0 + r_2\beta_2 - r_0\beta_0 + (\varrho_2 - \varrho_0)\beta = 0, \\ c_1 - c_0 + r_1\gamma_1 - r_0\gamma_0 + (\varrho_1 - \varrho_0)\gamma = 0, \\ c_2 - c_0 + r_2\gamma_2 - r_0\gamma_0 + (\varrho_2 - \varrho_0)\gamma = 0. \end{aligned}$$

Multipliciren wir hierauf sämmtliche sechs Gleichungen mit dem Factor λ und eliminiren die in den Gleichungen linear und homogen vorkommenden sechs Unbekannten:

$$\lambda, \quad -\lambda r_0, \quad \lambda r_1, \quad \lambda r_2, \quad \lambda(\varrho_1 - \varrho_0), \quad \lambda(\varrho_2 - \varrho_0),$$

so erhalten wir als das Resultat der Elimination die gesuchte Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ zwischen den Cosinus α, β, γ in der Form:

$$(46) \ldots \begin{vmatrix} a_1 - a_0 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & \alpha & 0 \\ b_1 - b_0 & \beta_0 & \beta_1 & 0 & \beta & 0 \\ c_1 - c_0 & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & \gamma & 0 \\ a_2 - a_0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha \\ b_2 - b_0 & \beta_0 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta \\ c_2 - c_0 & \gamma_0 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser Gleichung geht die Gleichung $D = 0$ der Oberfläche hervor, welche die gerade Linie L oder ein beliebiger Punkt P auf ihr beschreibt, wenn man für $\alpha\ \beta\ \gamma$ in der letzten

Verticalreihe der Elemente setzt ihre Werthe aus dem letzten Systeme der Gleichungen (44) und für $\alpha\ \beta\ \gamma$ in der vorletzten Verticalreihe setzt ihre Werthe aus dem vorletzten Systeme der Gleichungen (44). Mit Anwendung der bekannten Determinanten-Sätze wird man auf diese Weise finden:

$$(47)\ldots \quad \begin{vmatrix} a_1 - a_0 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & x - a_1 & 0 \\ b_1 - b_0 & \beta_0 & \beta_1 & 0 & y - b_1 & 0 \\ c_1 - c_0 & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & z - c_1 & 0 \\ a_2 - a_0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 & 0 & x - a_2 \\ b_2 - b_0 & \beta_0 & 0 & \beta_2 & 0 & y - b_2 \\ c_2 - c_0 & \gamma_0 & 0 & \gamma_2 & 0 & z - c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Obwohl die beiden abgeleiteten Determinanten-Gleichungen $\Delta = 0$ und $D = 0$ übersichtlich genug sind, um daraus weitere Schlüsse zu ziehen, so wollen wir doch noch einfachere Gleichungen entwickeln, welche das Problem lösen. Eliminiren wir zu diesem Zwecke aus dem ersten Systeme Gleichungen (45) r_1 und $\varrho_1 - \varrho_0$, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ a_1 - a_0 - r_0\alpha_0, & b_1 - b_0 - r_0\beta_0, & c_1 - c_0 - r_0\gamma_0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ a_1 - a_0, & b_1 - b_0, & c_1 - c_0 \end{vmatrix} - r_0 \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus mit Vertauschung der Indices 1 und 2 die Gleichung hervorgeht:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ a_2 - a_0, & b_2 - b_0, & c_2 - c_0 \end{vmatrix} - r_0 \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung, welche durch Elimination von r_2 und $\varrho_2 - \varrho_0$ aus dem zweiten Systeme Gleichungen (45) gerade so erhalten würde, wie die vorhergehende Gleichung aus dem ersten Systeme Gleichungen (45). Eliminiren wir nun r_0 aus den beiden

letzten Gleichungen, so erhalten wir die einfachste Form der Gleichung $\Delta = 0$:

$$(48)\ldots \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_1-a_0 & b_1-b_0 & c_1-c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_2-a_0 & b_2-b_0 & c_2-c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir endlich die Werthe von $\alpha\ \beta\ \gamma$ mit richtiger Wahl aus den beiden letzten Systemen Gleichungen (44) in diese Gleichung ein, so geht dieselbe in die gesuchte Gleichung $D = 0$ über:

$$(49) \begin{vmatrix} a_1-x & b_1-y & c_1-z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_1-a_0 & b_1-b_0 & c_1-c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2-x & b_2-y & c_2-z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2-x & b_2-y & c_2-z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_2-a_0 & b_2-b_0 & c_2-c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1-x & b_1-y & c_1-z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es bleibt noch übrig, die beiden eben abgeleiteten Gleichungen $\Delta = 0$ und $D = 0$ geometrisch zu interpretiren. Lässt man zu diesem Zwecke durch den Coordinatenanfangspunkt eine gerade Linie l gehen, welche parallel ist der gleitenden geraden Linie L und bezeichnet mit x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der ersteren, dessen Abstand vom Coordinatenanfangspunkt r sei, so hat man:

$$x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma.$$

Setzt man diese Werthe von $\alpha\ \beta\ \gamma$ in die Gleichung $\Delta = 0$, so wird sie homogen und vom zweiten Grade rücksichtlich der Coordinaten und unabhängig von r, welches aus der Gleichung fortgeht. Wenn man sich der, zur geometrischen Interpretation der Gleichung (18) in der vierten Vorlesung gegebenen, Definition der Oberflächen zweiter Ordnung erinnert, so beweiset dieses den Satz:

Eine gerade Linie, welche sich um einen festen Punkt in ihr so dreht, dass sie immer einer geraden

Linie parallel ist, welche auf drei im Raume gegebenen geraden Linien fortgleitet, beschreibt einen Kegel zweiter Ordnung.

Auf diesem Kegel liegen auch die drei geraden Linien, welche durch den festen Punkt parallel den gegebenen geraden Linien gezogen sind. Den Beweis davon wird man darin zu suchen haben, dass die Gleichung $\Delta = 0$ erfüllt wird, wenn man für $\alpha\ \beta\ \gamma$ setzt $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0$ oder $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ oder $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$.

Da die Gleichung $D = 0$ vom zweiten Grade ist rücksichtlich der Coordinaten $x\ y\ z$ des Punktes P der gleitenden geraden Linie L, so haben wir den Satz:

Eine gerade Linie, welche drei im Raume gegebene gerade Linien schneidet, beschreibt eine Oberfläche zweiter Ordnung.

Auf diese beiden Sätze kommt man viel einfacher, wenn man in der Aufgabe (41), deren Resultat sie sind, andere Formen der Gleichungen der gegebenen geraden Linien $L_0\ L_1\ L_2$ wählt. Wir haben dieser Form der Behandlung der Aufgabe hier nur deshalb den Vorzug gegeben, weil sie die Gelegenheit bietet, verschiedene Determinanten-Sätze in Anwendung zu bringen.

Neunte Vorlesung.

Allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Wie man die Ebene als den geometrischen Ort eines Punktes betrachten kann, dessen rechtwinklige Coordinaten einer gegebenen linearen Gleichung genügen, so werden wir den geometrischen Ort eines Punktes, dessen rechtwinklige Coordinaten einer gegebenen Gleichung des zweiten Grades:

$$f(x, y, z) = 0$$

genügen, eine Oberfläche zweiter Ordnung nennen, und die gegebene Gleichung die Gleichung dieser Oberfläche.

Die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung ist hiernach aus 10 Gliedern zusammengesetzt, die respective die Factoren haben: x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, x, y, z, 1, und jeder dieser Factoren hat seinen Coefficienten. Von diesen 10 Coefficienten kann jedoch einer, zum Beispiel der letzte, auf die Einheit zurückgeführt werden, indem man die Gleichung der Oberfläche durch ihn dividirt. In der auf diese Weise vereinfachten Gleichung der Oberfläche bleiben nur 9 Coefficienten zurück, die linear in die Gleichung eingehen, und deren Werthe die Natur der Oberfläche bestimmen.

Diese 9 Coefficienten können nicht mehr willkürlich sein, wenn die Oberfläche durch einen gegebenen Punkt gehen soll; sie müssen vielmehr der linearen Gleichung genügen, die man erhält, wenn man in der Gleichung der Oberfläche für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des gegebenen Punktes setzt.

Es werden daher 9 solcher Bedingungsgleichungen erfordert, um die 9 Coefficienten, und dadurch die Oberfläche selbst, unzweideutig zu bestimmen. Aber nicht jede 9 Punkte bestimmen die Oberfläche unzweideutig. Denn, wenn man die 9 Punkte so wählt, dass von den 9 Bedingungsgleichungen eine oder mehrere aus den übrigen folgen, so hat man nicht mehr die hinreichende Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den 9 zu bestimmenden Coefficienten. Daher drücken wir die gemachten Bemerkungen kurz so aus:

Durch 9 beliebig gewählte Punkte im Raume lässt sich im Allgemeinen nur eine einzige Oberfläche zweiter Ordnung hindurchlegen, und diese Oberfläche ist in allen ihren Theilen durch die 9 gewählten Punkte unzweideutig bestimmt.

Es bietet sich zunächst die Aufgabe dar: wenn 9 Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung gegeben sind, einen beliebigen zehnten Punkt der Oberfläche zu construiren, etwa den Punkt, in welchem eine, beliebig durch einen der 9 gegebenen Punkte gelegte, gerade Linie die Oberfläche schneidet.

Diese Aufgabe hat zwar ihre Lösung gefunden in Crelle's Journal für Mathematik Bd. 24, p. 36, aber sie entbehrt noch der Einfachheit und Eleganz, wodurch sich die Auflösung der analogen Aufgabe in der Ebene durch den Pascal'schen Satz auszeichnet.

Acht beliebig gewählte Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung bestimmen dieselbe nicht vollständig. Denn die 9 Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche brauchen ja nur 8 linearen Bedingungsgleichungen zu genügen. Aber es lassen sich durch diese 8 Bedingungsgleichungen 8 Coefficienten durch den neunten ausdrücken, den wir mit λ bezeichnen wollen, und der ganz willkürlich bleibt.

Sämmtliche Ausdrücke für die 8 Coefficienten sind von der Form $\alpha - \beta\lambda$, wo α und β Functionen bedeuten der Coordinaten der gegebenen 8 Punkte, die mit den 8 Punkten gegeben sind. Setzt man diese Ausdrücke für die 8 Coefficienten in die Gleichung der Oberfläche ein, so hat man die Gleichung der Oberfläche, welche durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgeht, und die Gleichung selbst stellt sich, wenn man die Glieder zusammenfasst, welche unabhängig von λ sind, ebenso die Glieder, welche den Factor λ haben, unter der Form dar:

$$\varphi(x, y, z) - \lambda\psi(x, y, z) = 0.$$

Diese Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ umfasst alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgehen. Denn da die Oberfläche erst durch 9 Punkte vollständig bestimmt ist, so kann man den Factor λ immer so bestimmen, dass die Oberfläche noch durch einen gegebenen neunten Punkt hindurchgeht.

Die Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

stellen zwei Oberflächen zweiter Ordnung dar, von denen jede durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgeht. Sie schneiden sich in einer Raumcurve, welche ebenfalls durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgeht. Diese Curve enthält ausser diesen 8 Punkten noch unendlich viele andere, die aber alle durch die 8 Punkte bestimmt sind, und welche auch auf der allgemeinen Oberfläche zweiter Ordnung liegen, die durch die

gegebenen 8 Punkte gelegt ist. Wir drücken diese Bemerkungen als Satz kurz so aus:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 8 beliebig gewählte Punkte des Raumes hindurchgehen, gehen im Allgemeinen zugleich durch eine durch die 8 Punkte bestimmte Raumcurve, in welcher sich je zwei von den genannten Oberflächen schneiden.

Da diese Raumcurve, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, durch beliebige 8 in ihr gewählte Punkte bestimmt ist, so kann man sich die Aufgabe stellen, einen beliebigen neunten Punkt der Curve zu construiren. Diese Aufgabe ist bisher nicht gelöset worden, und es scheint, dass die Auflösung nicht mehr linear sein kann, das heisst, nicht durch Construction allein von Ebenen und geraden Linien ausführbar.

Sollen hiernach 9 Punkte des Raumes eine Oberfläche zweiter Ordnung unzweideutig bestimmen, so dürfen sie nicht auf einer Raumcurve liegen, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ schneiden. Denn durch alle Punkte dieser Curve geht die ganze Schaar der Oberflächen $\varphi - \lambda\psi = 0$ hindurch, weil die Coordinaten aller Punkte, welche die beiden ersten Gleichungen erfüllen, auch der letzten genügen.

Ein specieller Fall der Oberflächen zweiter Ordnung ist ein Ebenenpaar. Denn, wenn:

$$A = 0, \quad B = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen bedeuten, so ist die Gleichung:

$$AB = 0,$$

welche ausdrückt, dass der variable Punkt (x, y, z) entweder in der einen oder in der anderen Ebene liegt, nach der Definition die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung. Diese Ebenen schneiden eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ in zwei ebenen Curven, und jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die beiden ebenen Curven hindurchgeht, stellt sich unter der Form dar:

$$f - \lambda AB = 0\,,$$

so dass, wenn $\varphi = 0$ die Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung ist, welche durch die beiden ebenen Curven hindurchgeht, man Werthe von λ und μ der Art wird bestimmen können, dass man identisch hat:

$$f - \lambda AB \equiv \mu\varphi.$$

Wenn dagegen nur f und A gegeben sind, so führt die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung $f - \lambda AB = 0$ vier in λB steckende willkürliche Constanten mit sich. Wir werden nachweisen, dass diese Gleichung alle Oberflächen zweiter Ordnung umfasst, welche durch den Schnitt der Ebene $A = 0$ und der Oberfläche $f = 0$ hindurchgehen.

Setzen wir zu diesem Zwecke $z = 0$ in der Gleichung $f = 0$ der Oberfläche, so verschwinden vier Glieder der Gleichung, und es bleiben nur sechs Glieder zurück, von welchen der Coefficient eines Gliedes durch Division der Gleichung auf die Einheit zurückgeführt werden kann. Die anderen 5 Coefficienten bestimmen die Natur der Schnittcurve der xy Ebene und der Oberfläche $f = 0$. Da ihre Gleichung von der zweiten Ordnung ist, so ist die Schnittcurve ein Kegelschnitt, der auf Grund der 5 Constanten in seiner Gleichung gerade so durch 5 Punkte in ihm unzweideutig bestimmt ist, wie die Oberfläche zweiter Ordnung durch 9 Punkte.

Wenn wir nun nachweisen können, dass der Grad der Gleichung der Oberfläche sich nicht ändert, wenn die Gleichung der Oberfläche auf ein beliebiges andere rechtwinklige Coordinatensystem bezogen wird, dessen eine Coordinatenebene dazu bestimmt sein soll, die Oberfläche zu schneiden, so wird daraus der Satz hervorgehen:

Jede Ebene schneidet eine Oberfläche zweiter Ordnung in einem Kegelschnitt.

Wir nehmen, um den Nachweis zu liefern, an, dass $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen der ursprünglichen Coordinatenebenen seien in dem zweiten Coordinatensystem, gegeben in der Normalform, also dass A_0, A_1, A_2 gegebene lineare Ausdrücke der Coordinaten X, Y, Z des zweiten Systemes seien. Bedeuten nun X, Y, Z die Coordinaten eines

beliebigen Punktes in dem zweiten und x, y, z die Coordinaten desselben Punktes in dem ursprünglichen Coordinatensysteme, so hat man nach (8) der zweiten Vorlesung:

$$x = -A_0, \quad y = -A_1, \quad z = -A_2.$$

Setzt man diese Werthe von x, y, z in irgend eine Gleichung $f = 0$ einer Oberfläche, wodurch die Gleichung transformirt wird auf das zweite Coordinatensystem, so ändert sich der Grad der Gleichung nicht, weil eben die Substitutionen linear sind.

Diese Betrachtung verfolgte den Zweck, nachzuweisen, dass die Gleichung $f - \lambda AB = 0$ mit den 4 in λB steckenden willkürlichen Constanten wirklich alle Oberflächen zweiter Ordnung umfasst, welche durch die Schnittcurve der Ebene $A = 0$ und der Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ gehen.

Diese Schnittcurve ist nach dem Vorhergehenden gegeben durch 5 Punkte in ihr. Die Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung $\varphi = 0$, welche durch dieselbe geht, hat also 5 Bedingungen zu erfüllen. Sie kann also nur 4 willkürliche Constanten in linearer Form mit sich führen. Allen diesen Bedingungen genügt die Gleichung $f - \lambda AB = 0$.

Wenn daher $f = 0$ und $\varphi = 0$ die Gleichungen von irgend zwei gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung sind, die sich in einer ebenen Curve schneiden, welche in der Ebene $A = 0$ liegt, so wird man die vier Constanten in λB und einen Factor μ immer so bestimmen können, dass man identisch hat:

$$f - \mu\varphi \equiv \lambda AB.$$

Es beweiset dieses den Satz:

Wenn zwei Oberflächen zweiter Ordnung sich in einer ebenen Curve schneiden, so schneiden sie sich zugleich noch in einer zweiten ebenen Curve.

Wir werden in einer späteren Vorlesung über die Kreisschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung Gelegenheit haben, von diesem Satze Gebrauch zu machen.

Sind nur 7 Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung gegeben, so haben die 9 Coefficienten in der Gleichung der

Oberfläche auch nur 7 linearen Bedingungsgleichungen zu genügen. Betrachtet man daher in diesen Bedingungsgleichungen 7 Coefficienten als die Unbekannten, und drückt sie, indem man die Gleichungen auflöset, durch die beiden anderen $\varkappa$ und λ aus, die willkürlich bleiben, so erhält man Ausdrücke von der Form $\alpha + \beta\varkappa + \gamma\lambda$, und die Gleichung der Oberfläche selbst nimmt, wenn man diese Ausdrücke substituirt, die Gestalt an:

$$\varphi + \varkappa\psi + \lambda\chi = 0.$$

Diese Gleichung mit den beiden willkürlichen Constanten $\varkappa$ und λ ist der analytische Ausdruck eines ganzen Systemes Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die gegebenen 7 Punkte hindurchgehen. Sie ist zusammengesetzt aus den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \chi = 0$$

von drei Oberflächen zweiter Ordnung, welche sich in den genannten 7 Punkten schneiden, und stellt, weil sie zwei willkürliche Constanten mit sich führt, und weil sie erfüllt wird für alle Werthe der Coordinaten, welche den drei letzten Gleichungen der drei Oberflächen zweiter Ordnung zugleich genügen, alle Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche durch sämmtliche Schnittpunkte der drei Oberflächen hindurchgehen. Setzt man nun voraus, dass drei Oberflächen zweiter Ordnung sich in 8 Punkten schneiden, eine Voraussetzung, die wir sogleich begründen werden, so hat man den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Punkte des Raumes gehen, gehen zugleich durch einen durch diese 7 Punkte bestimmten achten Punkt hindurch.

Hieraus entspringt nun die Aufgabe: wenn 7 Punkte des Raumes gegeben sind, den achten Punkt zu construiren, in welchem sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, die durch die 7 gegebenen Punkte hindurchgehen. Eine lineare Construction findet man in Crelle's Journal für Mathematik Bd. 20, p. 304—308.

Wenn nach dem Vorhergehenden die Raumcurve, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, ge-

geben ist durch 8 Punkte in ihr, so ist es nach dem zuletzt angegebenen Satze einleuchtend, dass zu ihrer Bestimmung nicht solche 8 Punkte gewählt werden dürfen, in welchen sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden.

Die Frage nach der Zahl der Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0,$$

welche sich nicht in einer und derselben Curve schneiden, ist ein rein algebraisches Problem, welches dadurch seine Lösung findet, dass man feststellt, wie viele Systeme Werthe der Variabeln den angegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit genügen, oder dass man den Grad der Endgleichung bestimmt, welche aus den drei Gleichungen durch Elimination von zwei Variabeln hervorgeht. Da aber der Grad der Endgleichung bei einem ungeschickten Eliminationsverfahren leicht durch einen überflüssigen Factor erhöht werden kann, so ist es zweckdienlich, die Zahl der Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung in einem speciellen Falle festzustellen. Denn kennt man diese Zahl in einem speciellen Falle, und man findet den Grad der Endgleichung gleich jener Zahl, so kann man versichert sein, dass die Endgleichung keinen überflüssigen Factor enthält. Nun lehrt aber die geometrische Betrachtung, dass drei Ebenenpaare, als specieller Fall dreier Oberflächen zweiter Ordnung, sich in 8 Punkten schneiden. Wenn daher das im Allgemeinen einzuhaltende Eliminationsverfahren schliesslich auch eine Gleichung des achten Grades giebt, so wird man dadurch den Beweis geführt haben, dass überhaupt drei Oberflächen zweiter Ordnung sich in 8 Punkten schneiden.

Wenn man durch Einführung der homogenen Coordinaten statt der rechtwinkligen, indem man $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ setzt respective für x, y, z, in die gegebenen Gleichungen, und durch Multiplication mit p^2 dieselben auf die Form zurückführt:

$$\varphi(x, y, z, p) = 0, \quad \psi(x, y, z, p) = 0, \quad \chi(x, y, z, p) = 0,$$

in welcher Form die linken Theile der Gleichungen homogene ganze Functionen des zweiten Grades der vier Coordinaten x, y, z, p bedeuten, so kommt das erwähnte algebraische

Problem darauf zurück, durch Elimination von zwei Coordinaten aus den zuletzt angegebenen drei Gleichungen die in Rücksicht auf die beiden anderen Coordinaten homogene Endgleichung zu bestimmen.

Aber auch dieses Problem entbehrt noch der Symmetrie, deren Aufrechterhaltung in den analytischen Operationen sich von so grossem Nutzen erweiset. Deshalb erweitern wir das Problem, indem wir es also ausdrücken:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination von x, y, z, p aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\varphi(x, y, z, p) = 0, \quad \psi(x, y, z, p) = 0, \quad \chi(x, y, z, p) = 0,$$
$$R \equiv ux + vy + wz + rp = 0.$$

Denn aus der in u, v, w, r homogenen Endgleichung wird, wenn man setzt: $u = v = 0$, $w = p$, $r = -z$, wodurch R identisch verschwindet, die eine Lösung des vorhergehenden Problems erhalten und in ähnlicher Weise die übrigen. Der Grad der in u, v, w, r homogenen Endgleichung wird folglich gleich der Zahl der Schnittpunkte der drei Oberflächen zweiter Ordnung sein.

Aber auch das erweiterte algebraische Problem hat seine geometrische Bedeutung. Denn betrachten wir u, v, w, r als die variabeln Coordinaten einer Ebene, so stellt $R = 0$ einen Punkt dar, und zwar, wenn wir unter x, y, z, p die aus den Gleichungen der drei Oberflächen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ sich ergebenden Werthe dieser Coordinaten verstehen, den Schnittpunkt der drei Oberflächen. Schneiden sich die drei Oberflächen in mehr als einem Punkte, so wird die durch Elimination der Punktcoordinaten hervorgehende Endgleichung in Ebenencoordinaten das Product sämmtlicher Schnittpunktgleichungen darstellen und sich daher in lineare Factoren auflösen lassen müssen.

Wir wenden uns nun zu der Lösung des Problems. Nach demselben hat man vier ganze homogene Functionen der Variabeln x, y, z, p, welche für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden:

$$\varphi, \quad \psi, \quad \chi, \quad R.$$

Die Determinante Δ dieser vier Functionen ist eine homogene Function des dritten Grades in Rücksicht auf die Variabeln und eine homogene Function des ersten Grades in Rücksicht auf die Ebenencoordinaten u, v, w, r. Da die drei ersten Functionen von gleichem Grade sind, so kommt der Satz (14) der vorhergehenden Vorlesung in Anwendung, nach welchem man hat:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \lambda u = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \lambda v = 0,$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \lambda w = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial p} + \lambda r = 0.$$

Neben diesen vier Gleichungen hat man noch folgende sieben:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0,$$
$$xR = 0, \quad yR = 0, \quad zR = 0, \quad pR = 0.$$

Dieses sind im Ganzen 11 lineare und homogene Gleichungen zwischen den 11 Unbekannten:

$$x^2, y^2, z^2, p^2, xy, xz, xp, yz, yp, zp, \lambda.$$

Betrachtet man diese 11 Unbekannten als Variable, so hat man 11 lineare homogene Functionen, welche für ein System Werthe der Variabeln verschwinden, nämlich die linken Theile jener 11 Gleichungèn. Die Determinante Ω dieser 11 linearen Functionen verschwindet nach Satz (8) der vorhergehenden Vorlesung. Man hat daher als Resultat der Elimination:

$$\Omega = 0.$$

Dass diese Gleichung homogen und vom achten Grade ist rücksichtlich der Ebenencoordinaten, sieht man sogleich, wenn man die Determinante Ω in der gebräuchlichen Form hinschreibt mit Angabe der Grade der Componenten. Dadurch ist zugleich im Allgemeinen der Satz bewiesen:

Drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden sich in 8 Punkten.

Wenn eine von den drei Oberflächen in ein Ebenenpaar übergeht, so werden jede von diesen Ebenen und die beiden anderen Oberflächen sich nur in vier Punkten schneiden können, was wir so ausdrücken:

Zwei Oberflächen zweiter Ordnung und eine Ebene schneiden sich in vier Punkten.

Dieser Satz wird durch die Auflösung der folgenden Aufgabe auch direct bewiesen:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination von x, y, z, p aus den Gleichungen hervorgeht:

$$\varphi(x, y, z, p) = 0, \quad \psi(x, y, z, p) = 0,$$

$$A \equiv ax + by + cz + dp = 0, \quad R \equiv ux + vy + wz + rp = 0.$$

Man hat hier wieder vier homogene Functionen φ, ψ, A, R, die beiden ersten vom zweiten, die anderen beiden vom ersten Grade, welche für ein System Werthe der Variabeln x, y, z, p verschwinden. Die Determinante Δ dieser Functionen ist homogen und von dem zweiten Grade. Da nun die beiden ersten Functionen von gleichem Grade sind, so hat man nach Satz (15) der vorhergehenden Vorlesung:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \lambda u + \mu a = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \lambda v + \mu b = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \lambda w + \mu c = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial p} + \lambda r + \mu d = 0,$$

und wenn man noch die Gleichungen hinzufügt:

$$A = 0, \quad R = 0,$$

so hat man 6 in Rücksicht auf die 6 Unbekannten:

$$x, \ y, \ z, \ p, \ \lambda, \ \mu$$

lineare homogene Gleichungen. Das Resultat der Elimination dieser Unbekannten aus den 6 Gleichungen wird:

$$\Omega = 0,$$

eine in den Ebenencoordinaten u, v, w, r homogene Gleichung des vierten Grades. Der hierdurch bewiesene Satz lässt sich auch so ausdrücken:

Die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung wird durch eine Ebene in 4 Punkten geschnitten.

Wird von den beiden Oberflächen zweiter Ordnung die eine ein Ebenenpaar, so ergiebt sich der Satz:

Eine Oberfläche zweiter Ordnung wird durch eine gerade Linie in 2 Punkten geschnitten,

der durch die Auflösung folgender Aufgabe auch direct bewiesen wird:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche aus der Elimination von x, y, z, p aus den Gleichungen hervorgeht:

$$\varphi(x, y, z, p) = 0, \qquad A \equiv ax + by + cz + dp = 0,$$

$$B \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta p = 0, \quad R \equiv ux + vy + wz + rp = 0.$$

Es verschwindet nach Satz (8) der vorhergehenden Vorlesung die in x, y, z, p lineare homogene Determinante Δ der Functionen φ, A, B, R, welche in Rücksicht auf u, v, w, r linear und homogen ist, für das System Werthe der Variabeln, welches den angegebenen vier Gleichungen genügt. Daher hat man die vier linearen Gleichungen:

$$\Delta = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad R = 0,$$

aus welchen durch Elimination der Variabeln die in u, v, w, r homogene Gleichung:

$$\Omega = 0$$

des zweiten Grades hervorgeht, welche analytisch das Schnittpunktepaar der Oberfläche zweiter Ordnung $\varphi = 0$ und der beiden Ebenen $A = 0$, $B = 0$ darstellt.

Zehnte Vorlesung.

Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung.

Wir gehen von der durch Einführung der homogenen Coordinaten x, y, z, p statt der rechtwinkligen Coordinaten homogen gemachten Gleichung zweiten Grades:

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad f(x, y, z, p) = 0,$$

als dem analytischen Ausdruck für die Oberflächen zweiter Ordnung, aus. Wir bringen dieselbe in Verbindung mit den Gleichungen einer geraden Linie, die durch irgend zwei Punkte 0 und 1 in ihr, deren Coordinaten wir mit den angehängten Indices 0, 1 bezeichnen, bestimmt ist, nämlich nach (1) der sechsten Vorlesung:

$$(2) \quad \dots\dots\dots \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda x_1, \\ y &= y_0 + \lambda y_1, \\ z &= z_0 + \lambda z_1, \\ p &= p_0 + \lambda p_1. \end{aligned}$$

Diese Coordinaten x, y, z, p, wenn sie der Gleichung der Oberfläche (1) genügen, sind die Coordinaten des Schnittpunktes der Oberfläche und der geraden Linie. Man hat daher zur Bestimmung von λ für den Schnittpunkt die Gleichung:

$$(3) \quad \dots \quad f(x_0 + \lambda x_1,\ y_0 + \lambda y_1,\ z_0 + \lambda z_1,\ p_0 + \lambda p_1) = 0.$$

Da diese Gleichung aber in λ eine quadratische ist, so erkennt man darin einen zweiten Beweis, dass die gerade Linie die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Punkten schneidet. Die Coordinaten x, y, z, p des einen oder des anderen Schnittpunktes erhält man aus (2), indem man die eine oder die andere Wurzel für λ setzt. Da die quadratische Gleichung entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Wurzeln hat, so wird dem gemäss die gerade Linie die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten schneiden. Das Verhältniss der beiden Wurzeln ist das anharmonische Verhältniss des Schnittpunktepaares zu dem ge-

gebenen Punktepaare. Die Bedingung, dass das Schnittpunktepaar harmonisch sei zu dem gegebenen, ist daher das Verschwinden der Summe der beiden Wurzeln.

Um diese Bedingung auszudrücken, entwickeln wir die Gleichung (3) mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes nach Potenzen von λ, wodurch die Gleichung die Gestalt erhält:

$$(4) \ldots\ldots \quad f_{00} + 2\lambda f_{01} + \lambda^2 f_{11} = 0,$$

wenn:

$$2f_{00} = 2f(x_0, y_0, z_0, p_0) = x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0) + p_0 f'(p_0),$$
$$2f_{11} = 2f(x_1, y_1, z_1, p_1) = x_1 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_1 f'(z_1) + p_1 f'(p_1),$$
$$2f_{01} = x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0).$$

Die Summe der beiden Wurzeln verschwindet allein unter der Bedingung:

$$(5) \ldots \quad x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0) = 0,$$

welche sich auch so ausdrücken lässt:

$$(6) \ldots \quad x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1) + p_0 f'(p_1) = 0;$$

denn der linke Theil dieser Gleichung bleibt bei der Vertauschung der Indices 0 und 1 mit einander ungeändert, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man für die Zeichen der Differentialquotienten ihre wirklichen Ausdrücke setzt.

Diese Gleichung ist also die Bedingung zwischen den Coordinaten zweier Punkte 0 und 1, die stattfinden muss, wenn die Verbindungslinie derselben die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Punkten schneiden soll, die harmonisch sind zu den Punkten 0 und 1.

Man nennt zwei Punkte **harmonische Pole der Oberfläche zweiter Ordnung**, wenn ihre Verbindungslinie die Oberfläche in zwei Punkten schneidet, die harmonisch sind zu den beiden Punkten. Die Gleichung (5) oder (6) ist demnach die einzige Bedingungsgleichung für ein harmonisches Polenpaar 0 und 1 der Oberfläche (1). Diese Bedingungsgleichung ist linear und homogen in Rücksicht auf die Coordinaten jedes der beiden Pole. Deshalb wird der geometrische Ort des einem gegebenen Punkte 0 zugeordneten harmonischen Poles (x, y, z, p) eine Ebene sein:

$$(7) \ldots \quad x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0) = 0.$$

Diese Ebene nennt man die Polarebene des gegebenen Punktes oder seine Polare, und den gegebenen Punkt den Pol der Ebene. Die Polarebene eines gegebenen Punktes ist demnach der geometrische Ort des dem gegebenen Punkte zugeordneten Poles, oder, anders ausgedrückt, der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes auf den, durch den gegebenen Punkt gehenden, Strahlen.

Bezeichnet man die homogenen Coordinaten der Polarebene des Punktes 0 mit u_0, v_0, w_0, r_0, so hat man folgende lineare Relationen zwischen den Coordinaten des Poles und den Coordinaten seiner Polarebene:

$$(8) \ldots \tfrac{1}{2}f'(x_0) = u_0, \; \tfrac{1}{2}f'(y_0) = v_0, \; \tfrac{1}{2}f'(z_0) = w_0, \; \tfrac{1}{2}f'(p_0) = r_0,$$

wodurch die Coordinaten der Polarebene ausgedrückt sind durch die Coordinaten des Poles und umgekehrt die Coordinaten des Poles sich berechnen lassen, wenn die Coordinaten der Polarebene gegeben sind. Da im letzteren Falle die Coordinaten der Polarebene beliebige Werthe erhalten können, so sieht man, dass jede beliebige Ebene die Polarebene eines durch die Ebene bestimmten Punktes ist, gleich wie jeder Punkt des Raumes seine Polarebene hat.

Wenn man auf der Polarebene (7) des Punktes 0 einen beliebig gewählten Punkt 1 fixirt, so hat man nach dem Vorhergehenden die Relation (6). Die Gleichung der Polarebene des Punktes 1:

$$xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1) + pf'(p_1) = 0$$

wird hiernach erfüllt, wenn man für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Punktes 0 setzt, das heisst, die Polarebene des Punktes 1 geht durch den Punkt 0. Man erkennt hierin den Beweis des Satzes:

Wenn ein Punkt eine Ebene durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um einen Punkt, den Pol der Ebene.

Hieraus folgt sogleich ein zweiter Satz:

Wenn ein Punkt eine gerade Linie durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um eine zweite gerade Linie, die in der Polarebene liegt.

Diese beiden geraden Linien entsprechen einander in der Weise, dass die Polarebenen der Punkte auf der einen geraden Linie sich in der zweiten geraden Linie schneiden. Ein solches Linienpaar nennt man reciproke Polaren der Oberfläche zweiter Ordnung und man erkennt leicht, dass jede beliebige gerade Linie im Raume ihre reciproke Polare hat.

Es sind hierdurch zugleich die Mittel geboten, mit Leichtigkeit die umgekehrten Sätze zu beweisen, nämlich folgende:

Wenn eine Ebene sich um einen gegebenen Punkt dreht, so beschreibt der Pol der Ebene die Polarebene des gegebenen Punktes.

Wenn eine Ebene sich um eine gerade Linie in ihr dreht, so beschreibt der Pol der Ebene die reciproke Polare der geraden Linie.

Der Pol o liegt von seiner Polarebene bald weiter entfernt, bald näher, je nach seiner Lage zu der Oberfläche. Er kann selbst in seine Polarebene hineinfallen. Die Bedingung, dass er in seine Polarebene falle, wird aus (7) erhalten, wenn man für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Poles setzt, wodurch man erhält $f(x_0, y_0, z_0, p_0) = 0$. Das heisst, wenn der Pol ein Punkt der Oberfläche zweiter Ordnung wird, so liegt er in seiner Polarebene. In diesem Falle hat auch die Polarebene eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Denn wählt man auf der Polarebene des in die Oberfläche fallenden Poles o beliebig einen Punkt p, so sind o und p harmonische Pole der Oberfläche. Die gerade Linie op schneidet also die Oberfläche in einem Punktepaare, welches harmonisch ist zu dem Punktepaare o, p. Von diesem Schnittpunktepaar fällt aber ein Punkt mit dem Punkte o zusammen. Es muss daher der andere ebenfalls mit ihm zusammenfallen. Das heisst, die gerade Linie op schneidet die Oberfläche in zwei mit o zusammenfallenden Punkten. Eine solche gerade Linie nennt man Tangente der Oberfläche im Punkte o. Die Polarebene von o ist demnach der geometrische Ort der Tangenten der Oberfläche in dem Punkte o.

Der geometrische Ort der Tangenten in einem Punkte o der Oberfläche zweiter Ordnung ist hiernach eine Ebene, die

Tangentenebene der Oberfläche in diesem Punkte. Wir drücken diese Bemerkungen kurz so aus:

Wenn der Pol ein Punkt der Oberfläche zweiter Ordnung wird, so wird seine Polarebene die Tangentenebene der Oberfläche in diesem Punkte, und umgekehrt ist der Pol der Tangentenebene einer Oberfläche zweiter Ordnung der Berührungspunkt.

Die Gleichung (7) ist demnach die Gleichung der Tangentenebene in dem Punkte (x_0, y_0, z_0, p_0), wenn dieser Punkt in der Oberfläche zweiter Ordnung selbst liegt.

Schneidet man die Oberfläche zweiter Ordnung durch eine Ebene e, deren Pol p sei, und nimmt auf der Schnittcurve beliebig einen Punkt o an, so geht die Tangentenebene der Oberfläche im Punkte o, weil sie Polarebene dieses Punktes ist, durch p, und die gerade Linie op ist Tangente der Oberfläche. Man hat daher den Satz:

Wenn man den Pol einer Ebene durch eine gerade Linie verbindet mit irgend einem Punkte der Schnittcurve der Ebene und der Oberfläche zweiter Ordnung, so ist diese gerade Linie Tangente der Oberfläche in dem letzteren Punkte.

Man erhält daher die Tangenten, die von einem gegebenen Punkte an eine Oberfläche zweiter Ordnung gelegt werden können, wenn man jeden Punkt der Schnittcurve der Polarebene durch eine gerade Linie verbindet mit dem gegebenen Punkte. Der geometrische Ort dieser Tangenten ist der Tangentenkegel der Oberfläche. Der Tangentenkegel berührt also eine Oberfläche zweiter Ordnung in derjenigen Curve, in welcher die Polarebene der Spitze die Oberfläche schneidet.

Wir wiederholen die Relationen (8) zwischen den Coordinaten x, y, z, p des Poles und den Coordinaten u, v, w, r der Polarebene der Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z, p) = 0$:

$$(9) \ldots \tfrac{1}{2}f'(x) = u, \quad \tfrac{1}{2}f'(y) = v, \quad \tfrac{1}{2}f'(z) = w, \quad \tfrac{1}{2}f'(p) = r.$$

Um die Coordinaten x, y, z, p des Poles auszudrücken, wenn die Coordinaten u, v, w, r der Polarebene gegeben sind,

hat man diese linearen Gleichungen aufzulösen. Die Auflösung ergiebt für die Coordinaten des Poles Ausdrücke von der Form: $au + bv + cw + dr$. Setzt man diese Ausdrücke für x, y, z, p in die homogene Function zweiter Ordnung $f(x, y, z, p)$, so erhält man eine homogene Function $F(u, v, w, r)$ ebenfalls der zweiten Ordnung, welche wir die reciproke Function der Function $f(x, y, z, p)$ nennen, und welche durch Substitution der Ausdrücke (9) wieder in die Function $f(x, y, z, p)$ übergeht.

Man hat daher unter Vermittelung der Substitutionen (9) die Gleichung:

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad F(u, v, w, r) = f(x, y, z, p).$$

Da aber: $f(x, y, z, p) = x\,\frac{1}{2}f'(x) + y\,\frac{1}{2}f'(y) + z\,\frac{1}{2}f'(z) + p\,\frac{1}{2}f'(p)$, so hat man ferner:

$$(11) \quad \ldots \quad F(u, v, w, r) = xu + yv + zw + pr.$$

Diese beiden Gleichungen (10) und (11) sind identische, wenn man sich die Werthe von u, v, w, r aus (9), oder, wenn man sich die Werthe von x, y, z, p, wie sie sich durch Auflösung der Gleichungen (9) ergeben, substituirt denkt.

Differentiirt man unter der letzteren Annahme die Gleichungen (10) und (11) partiell nach u, so erhält man:

$$F'(u) = \frac{\partial x}{\partial u} f'(x) + \frac{\partial y}{\partial u} f'(y) + \frac{\partial z}{\partial u} f'(z) + \frac{\partial p}{\partial u} f'(p)$$
$$= 2\left\{\frac{\partial x}{\partial u} u + \frac{\partial y}{\partial u} v + \frac{\partial z}{\partial u} w + \frac{\partial p}{\partial u} r\right\},$$
$$F'(u) = x + \frac{\partial x}{\partial u} u + \frac{\partial y}{\partial u} v + \frac{\partial z}{\partial u} w + \frac{\partial p}{\partial u} r.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch 2 und zieht sie von der letzten ab, so wird:

$$\tfrac{1}{2}F'(u) = x.$$

Auf diese Weise erhält man durch Differentiation der Gleichungen (10) und (11) nach u, v, w, r respective die Gleichungen:

$$(12) \quad \tfrac{1}{2}F'(u) = x, \quad \tfrac{1}{2}F'(v) = y, \quad \tfrac{1}{2}F'(w) = z, \quad \tfrac{1}{2}F'(r) = p,$$

welche nichts anderes sind als die Auflösungen der linearen Gleichungen (9). Es verdient bemerkt zu werden, dass sie von derselben Form sind, als die aufzulösenden Gleichungen.

Um die der Function f reciproke Function F zu bilden, hat man die Werthe von x, y, z, p der aufgelösten Gleichungen (12) in f einzusetzen, wodurch man erhält:

$$F(u, v, w, r) = f(\tfrac{1}{2}F'(u),\ \tfrac{1}{2}F'(v),\ \tfrac{1}{2}F'(w),\ \tfrac{1}{2}F'(r)).$$

Aber einfacher und zugleich auf einem eleganteren Wege gelangt man zum Ziele durch die identische Gleichung:

$$F(u, v, w, r) = u\,.\,\tfrac{1}{2}F'(u) + v\,.\,\tfrac{1}{2}F'(v) + w\,.\,\tfrac{1}{2}F'(w) + r\,.\,\tfrac{1}{2}F'(r),$$

denn die Ausdrücke $\frac{1}{2}F'(u)$ . . ., aus welchen der rechte Theil der Gleichung zusammengesetzt ist, sind durch die Auflösungen (12) der Gleichungen (9) unmittelbar gegeben.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die der Function F reciproke Function wieder die ursprüngliche f ist. Diese beiden Functionen, die nach (10) unter Vermittelung der Substitutionen (9) oder (12) identische werden, stehen hiernach in solcher Beziehung, dass durch die eine auch die andere gegeben ist.

In der Gleichung (10) bedeuteten x, y, z, p die Coordinaten des Poles und u, v, w, r die Coordinaten der dem Pole zugeordneten Polarebene. Wenn der Pol die Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ durchläuft, so berührt die Polarebene dieselbe Oberfläche und ist Tangentenebene der Oberfläche in dem Pole. Für diesen Fall hat man aber nach (10):

$$F(u, v, w, r) = f(x, y, z, p) = 0,$$

das heisst, wenn eine Ebene Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ ist, so genügen die Coordinaten dieser Ebene der Gleichung zweiten Grades $F(u, v, w, r) = 0$, und umgekehrt, wenn die Coordinaten einer Ebene dieser Gleichung genügen, so ist die Ebene eine Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$.

Denkt man sich die Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ durch ihre sämmtlichen Tangentenebenen erzeugt in gleicher Weise, wie bisher durch Punkte in ihr, so wird man nach der Analogie die Gleichung:

(13) . . . . $F(u, v, w, r) = 0$

die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten nennen, zum Unterschiede von der in

Punktcoordinaten gegebenen Gleichung $f(x, y, z, p) = 0$ derselben Oberfläche. Man versteht also unter der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten die Gleichung zweiten Grades, welche die Coordinaten einer Ebene zu erfüllen haben, wenn die Ebene Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung sein soll. Wie sie aus der gegebenen Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten oder wie aus ihr wiederum die Gleichung der Oberfläche in Punktcoordinaten hervorgeht, ist nach dem Vorhergehenden klar.

Um zu einer neuen Form der Function f zu gelangen, stellen wir unter Beifügung eines Factors $t = -1$ die Gleichungen zusammen, welche vorhin dazu dienten, die Function f als eine Function der Ebenencoordinaten wiederzugeben:

$$(14) \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'(x) + u \,.\, t &= 0, \\ \tfrac{1}{2}f'(y) + v \,.\, t &= 0, \\ \tfrac{1}{2}f'(z) + w \,.\, t &= 0, \\ \tfrac{1}{2}f'(p) + r \,.\, t &= 0, \\ ux + vy + wz + rp + f \,.\, t &= 0. \end{aligned}$$

Die linken Theile dieser 5 Gleichungen kann man als lineare homogene Functionen der 5 Variabeln x, y, z, p, t betrachten, die für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden. Die Determinante Δ dieser 5 Functionen verschwindet nach (8) der achten Vorlesung für diese Werthe. Man hat daher eine Gleichung $\Delta = 0$ zwischen f und den Ebenencoordinaten, woraus sich f als eine Function der Ebenencoordinaten ergiebt.

Zur wirklichen Darstellung der Function f in der angedeuteten Weise bedarf es der Kenntniss der Function f selbst. Nehmen wir daher an, dass:

$$(15) \quad \begin{aligned} f = {} & a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + a_{33}p^2 \\ & + 2a_{01}xy + 2a_{02}xz + 2a_{03}xp \\ & + 2a_{12}yz + 2a_{13}yp + 2a_{23}zp, \end{aligned}$$

so wird, indem wir der Bequemlichkeit wegen setzen $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$:

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(y) = a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(z) = a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(p) = a_{30}x + a_{31}y + a_{32}z + a_{33}p.$$

Setzt man diese Werthe aber in (14), so erhält man die gesuchte Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & w \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & r \\ u, & v, & w, & r, & f+0 \end{vmatrix},$$

und aus der Gleichung $\Delta = 0$, mit Rücksicht auf (16) der siebenten Vorlesung, wird:

$$(16) \ldots \quad A \cdot f + \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & w \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & r \\ u, & v, & w, & r, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

indem man hat:

$$(17) \ldots\ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Da aber die durch Ebenencoordinaten ausgedrückte Function f nach (10) die Function F ist, so hat man eine zweite Darstellung der Function F in Determinantenform:

$$(18) \quad F(u, v, w, r) = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & w \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & r \\ u, & v, & w, & r, & 0 \end{vmatrix}.$$

Elfte Vorlesung.

Weitere allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Von der Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung in Punktcoordinaten am Anfange der neunten Vorlesung ausgehend, gelangten wir mit Hülfe von Pol und Polarebene am Schlusse der letzten Vorlesung zu einer neuen analytischen Ausdrucksweise der Oberflächen zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten:

$$F(u, v, w, r) = 0,$$

der Bedingungsgleichung zweiten Grades, welche erfüllt wird, wenn die Ebene (u, v, w, r) Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung ist. Eine gleiche Behandlungsweise dieser Gleichung, wie in der neunten Vorlesung die der Gleichung der Oberfläche in Punktcoordinaten, wird zu analogen Sätzen führen.

Die angegebene Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist aus 10 Gliedern zusammengesetzt, von welchen jedes Glied seinen Coefficienten hat. Da jedoch durch Division der Gleichung durch einen Coefficienten dieser Coefficient auf die Einheit zurückkommt, so kann man, ohne die Gleichung zu beschränken, annehmen, dass ein Coefficient gleich 1 sei, dass also die Gleichung nur 9 Coefficienten enthalte, welche in linearer Weise in die Gleichung eingehen, und deren Werthe die Natur der Oberfläche zweiter Ordnung bedingen.

Soll die Oberfläche zweiter Ordnung eine durch ihre Coordinaten gegebene Ebene berühren, so müssen diese 9 Coefficienten der linearen Bedingungsgleichung genügen, die man erhält, wenn man in der Gleichung der Oberfläche für die Variabeln die gegebenen Coordinaten der Ebene setzt. Neun solcher Bedingungsgleichungen bestimmen die 9 Coefficienten unzweideutig. Daher hat man den Satz:

Durch 9 beliebig gewählte Tangentenebenen ist eine Oberfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen unzweideutig bestimmt.

Acht Tangentenebenen der Oberfläche zweiter Ordnung, welche 8 linearen Bedingungsgleichungen zwischen den 9 Coeffienten entsprechen, bestimmen deshalb die Oberfläche nicht vollständig. Vielmehr lassen sich 8 Coefficienten durch den neunten λ, der willkürlich bleibt, ausdrücken, und diese Ausdrücke, eingesetzt in die obige Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, geben die allgemeine Form der Gleichung aller Oberflächen zweiter Ordnung:

$$\Phi(u, v, w, r) - \lambda\, \Psi(u, v, w, r) = 0,$$

welche 8 gegebene Ebenen berühren.

Daraus erhält man, indem man $\lambda = 0$ oder $= \infty$ setzt, die Gleichungen:

$$\Phi(u, v, w, r) = 0, \quad \Psi(u, v, w, r) = 0$$

zweier bestimmten Oberflächen zweiter Ordnung, welche die 8 gegebenen Ebenen berühren. Diese beiden Oberflächen haben unendlich viele gemeinschaftliche Tangentenebenen, welche den Ebenencoordinaten entsprechen, die beiden Gleichungen zugleich genügen. Da aber die Ebenencoordinaten, welche den beiden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen, auch der vorhergehenden allgemeinen Gleichung genügen, so hat man den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 gegebene Ebenen berühren, werden von allen Ebenen berührt, welche gemeinschaftliche Tangentenebenen zweier dieser Oberflächen sind.

Soll daher eine Oberfläche zweiter Ordnung durch 9 Tangentenebenen bestimmt sein, so dürfen diese nicht zwei Oberflächen zweiter Ordnung zugleich berühren.

Ein specieller Fall einer Oberfläche zweiter Ordnung ist ein Punktepaar, oder, will man sich eine andere Vorstellung davon machen, eine in eine gerade Linie ausgeartete Oberfläche, welche durch die beiden Punkte begrenzt ist. Denn wenn:

$$A = 0, \quad B = 0$$

die Gleichungen zweier Punkte bedeuten, so stellt:

$$AB = 0,$$

als eine Gleichung zweiten Grades, eine Oberfläche zweiter Ordnung dar.

Ist nun $F = 0$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten, so hat man den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die Oberflächen zweiter Ordnung, welche von allen Tangentenebenen der gegebenen Oberfläche berührt werden, die entweder durch den einen oder den anderen Punkt hindurchgehen:

$$F - \lambda AB = 0.$$

Mit anderen Worten lässt sich dasselbe also wiedergeben: Die angegebene Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ stellt alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche die beiden von den Punkten $A = 0$ und $B = 0$ ausgehenden Tangentenkegel der gegebenen Oberfläche $F = 0$ ringsum berühren.

Ist daher $\Phi = 0$ die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche jeden der genannten Tangentenkegel ringsum berührt, so wird man immer die Factoren λ und μ so bestimmen können, dass man identisch hat:

$$F - \lambda AB \equiv \mu \Phi.$$

Nimmt man an, F und A seien gegeben, so stellt die Gleichung $F - \lambda AB = 0$ mit den vier in λB steckenden willkürlichen Constanten eine Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche den vom Punkte $A = 0$ ausgehenden Tangentenkegel der Oberfläche $F = 0$ berührt. Wir werden beweisen, dass diese Gleichung $F - \lambda AB = 0$ alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung darstellt, welche von dem, von dem Punkte $A = 0$ ausgehenden, Tangentenkegel der Oberfläche $F = 0$ ringsum berührt werden.

Wenn man die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung $F = 0$, welche die Bedingung für die Tangentenebenen der Oberfläche ist, mit der Gleichung $r = 0$ des Coordinatenanfangspunktes zusammenstellt, so sind beide Gleichungen die Bedingungen für diejenigen Tangentenebenen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen.

Die erste von diesen Bedingungsgleichungen lässt sich einfacher darstellen. Denn setzt man in derselben $r = 0$,

wodurch sie übergehe in $F_0 = 0$, so werden $F_0 = 0$ und $r = 0$ die Bedingungen für die Tangentenebenen der Oberfläche $F = 0$ sein, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen.

Die Gleichung $F_0 = 0$ *) hat nur sechs Glieder. Da der Coefficient eines Gliedes durch Division der Gleichung in die Einheit verwandelt werden kann, so werden die Lagen aller Tangentenebenen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen, analytisch von den 5 übrigen Coefficienten abhängen. Diese 5 Coefficienten sind unzweideutig bestimmt durch 5 Tangentenebenen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen. Wir können deshalb sagen „dass der von dem Coordinatenanfangspunkte ausgehende Tangentenkegel einer Oberfläche zweiter Ordnung durch 5 seiner Tangentenebenen unzweideutig bestimmt sei.“

Dasselbe gilt für jeden Tangentenkegel einer Oberfläche zweiter Ordnung, von welchem Punkte des Raumes er auch ausgehen mag. Denn da durch Verlegung des rechtwinkligen Coordinatensystems die Form der Gleichung $f = 0$ der Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten nach den Auseinandersetzungen in der neunten Vorlesung sich nicht ändert, so wird nach der zehnten Vorlesung auch die Gleichung $F = 0$ der Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ihre Form nicht ändern, und es kann jeder Punkt des Raumes in gleicher Weise als Coordinatenanfangspunkt dienen.

Wenn nun eine Oberfläche zweiter Ordnung $F = 0$ und ein Punkt $A = 0$ vorliegen, so wissen wir, dass 5 Tangentenebenen des, von dem Punkte ausgehenden, Tangentenkegels

---

*) Die Gleichung $F_0 = 0$ ist wieder die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, die aber, wie sich aus den Angaben der zehnten Vorlesung nachweisen lässt, reelle Punkte nur im Unendlichen aufweiset. Eine andere Eigenschaft dieser Oberfläche ist, dass jede Ebene, welche parallel geht einer ihrer Tangentenebenen, wieder Tangentenebene derselben Oberfläche ist.

Von dieser Art Oberflächen zweiter Ordnung, welche nur im Unendlichen liegen, kann man sich allerdings keine klare geometrische Vorstellung machen, sie dienen jedoch in der synthetischen Geometrie als Mittel zur Erfindung von geometrischen Sätzen, deren directe Beweise oft nicht ohne Schwierigkeit gefunden werden.

der Oberfläche, welche zugleich Tangentenebenen der Oberfläche sind, den Tangentenkegel unzweideutig bestimmen. Die Oberfläche $F=0$ bestimmen sie aber nicht vollständig. Durch 5 Tangentenebenen der Oberfläche sind nur 5 lineare Bedingungsgleichungen zwischen den 9 Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche gegeben. Die Gleichung der Oberfläche muss daher noch 4 willkürliche Constanten in linearer Weise mit sich führen. Den genannten 5 Bedingungsgleichungen genügen die Coefficienten in der Gleichung $F-\lambda AB=0$, welche noch 4 in λB steckende willkürliche Constanten mit sich führt. Sie stellt also jede Oberfläche zweiter Ordnung dar, für welche der von dem Punkte $A=0$ an die Oberfläche $F=0$ gelegte Tangentenkegel ebenfalls Tangentenkegel ist.

Wenn daher $F=0$ und $\Phi=0$ die Gleichungen zweier Oberflächen zweiter Ordnung sind, die den von dem Punkte $A=0$ ausgehenden Tangentenkegel gemeinsam haben, so wird man μ und die vier in λB steckenden Constanten immer so bestimmen können, dass man identisch hat:

$$F-\mu\Phi\equiv\lambda AB.$$

Daraus ergiebt sich der Satz:

Wenn zwei Oberflächen zweiter Ordnung von demselben Tangentenkegel ringsum berührt werden, so werden sie gleichzeitig von einem zweiten Tangentenkegel ringsum berührt.

Sind nur 7 Tangentenebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung $F=0$ durch ihre Coordinaten gegeben, so hat man zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche auch nur 7 lineare Bedingungsgleichungen, mittels welcher sich 7 Coefficienten durch die beiden anderen λ und μ, die willkürlich bleiben, ausdrücken lassen. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung $F=0$ der Oberfläche ein, so erhält man die allgemeinste Form der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, welche die 7 Ebenen berührt:

$$\Phi+\varkappa\Psi+\lambda X=0.$$

Da diese Gleichung zusammengesetzt ist aus den Gleichungen der drei Oberflächen zweiter Ordnung:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad X = 0,$$

so wird sie erfüllt für jedes System der Ebenencoordinaten, welches den drei Gleichungen zugleich genügt. Das heisst, die gemeinsamen Tangentenebenen der drei Oberflächen sind zugleich Tangentenebenen der allgemeinen Oberfläche zweiter Ordnung, welche die 7 Ebenen berührt. Die drei Oberflächen zweiter Ordnung werden aber, wie wir sogleich nachweisen werden, von 8 Ebenen zugleich berührt. Da von diesen 8 Ebenen 7 die gegebenen sind, denn die angegebenen drei Oberflächen sind specielle Fälle der allgemeinen Oberfläche zweiter Ordnung, so hat man den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 gegebene Ebenen berühren, berühren überdies eine, durch die 7 Ebenen bestimmte, achte Ebene.

Wenn daher zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung 8 solche Ebenen gegeben sind, so vertreten sie nur die Stelle von 7 Ebenen.

Die Bestimmung der dreien Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen Tangentenebenen führt auf die rein algebraische Aufgabe:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination der Variabeln u, v, w, r aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad X = 0,$$
$$R \equiv ux + vy + wz + rp = 0.$$

Denn die Endgleichung wird das Product der Gleichungen sämmtlicher gemeinsamen Tangentenebenen sein, in Punktcoordinaten ausgedrückt.

Diese Aufgabe, sowie die folgenden, sind bereits in der neunten Vorlesung mit Vertauschung von Punkt- und Ebenencoordinaten gelöst worden. Wir entnehmen daraus, dass die homogene Engleichung in Punktcoordinaten vom achten Grade ist, wodurch der Satz bewiesen wird:

Drei Oberflächen zweiter Ordnung haben 8 gemeinsame Tangentenebenen.

Ebenso führt die Bestimmung der gemeinsamen Tangentenebenen zweier Oberflächen zweiter Ordnung $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, welche durch einen gegebenen Punkt $A = 0$ hindurchgehen, auf die Aufgabe zurück:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination der Variabeln u, v, w, r aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad A \equiv au + bv + cw + dr = 0,$$
$$R \equiv ux + vy + wz + rp = 0.$$

Die geometrische Interpretation der Endgleichung giebt den Satz:

Durch einen gegebenen Punkt des Raumes lassen sich vier Ebenen legen, welche zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung zugleich berühren.

Die Frage endlich nach den Tangentenebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung $\Phi = 0$, welche durch zwei beliebig gegebene Punkte des Raumes $A = 0$ und $B = 0$ oder durch die Verbindungslinie derselben hindurchgehen, fällt mit der Aufgabe zusammen:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination der Variabeln u, v, w, r aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\Phi = 0, \qquad A \equiv au + bv + cw + dr = 0,$$
$$B \equiv \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r = 0, \quad R \equiv ux + vy + wz + rp = 0.$$

Dass die Endgleichung in Rücksicht auf die Punktcoordinaten vom zweiten Grade ist, dient als Beweis des Satzes:

Durch eine gerade Linie lassen sich zwei Tangentenebenen an eine Oberfläche zweiter Ordnung legen.

Zwölfte Vorlesung.

Fortsetzung der zehnten Vorlesung über Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung. Reciprocität.

Wir haben am Ende der zehnten Vorlesung für die Oberflächen der zweiten Ordnung den analytischen Ausdruck derselben gefunden:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(u, v, w, r) = 0.$$

Wir stellen denselben zusammen mit den Coordinaten u, v, w, r irgend einer Ebene, welche durch die Schnittlinie l zweier gegebenen Ebenen 0 und 1 hindurchgeht, deren Coordinaten wir mit den angehängten Indices bezeichnen, indem wir die betreffenden Relationen aus (4) der sechsten Vorlesung entnehmen:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} u &= u_0 + \lambda u_1, \\ v &= v_0 + \lambda v_1, \\ w &= w_0 + \lambda w_1, \\ r &= r_0 + \lambda r_1, \end{aligned}$$

Wenn diese Coordinaten u, v, w, r der Gleichung (1) genügen, so entsprechen sie den Tangentenebenen der Oberfläche. Man hat daher zur Bestimmung der Tangentenebenen der Oberfläche, die durch die gerade Linie l gehen, die Gleichung:

$$(3) \quad F(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1, w_0 + \lambda w_1, r_0 + \lambda r_1) = 0.$$

Dass diese Gleichung eine in λ quadratische Gleichung ist, wird als neuer Beweis des Satzes gelten, den wir aus einer anderen Betrachtung bereits abgeleitet haben, dass durch eine gerade Linie sich an eine Oberfläche zweiter Ordnung zwei Tangentenebenen legen lassen.

Das anharmonische Verhältniss des erwähnten Tangentenebenenpaares zu dem gegebenen Ebenenpaare 0, 1 ist das Verhältniss der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung. Es wird dieses Verhältniss zu einem harmonischen unter der

Bedingung, dass die Summe der beiden Wurzeln verschwindet. Entwickelt man, um diese Bedingung auszudrücken, die quadratische Gleichung (3) nach Potenzen von λ und setzt in der Entwickelung den Coefficienten der ersten Potenz gleich 0, so erhält man:

$$(4)\ldots \quad u_1 F'(u_0) + v_1 F'(v_0) + w_1 F'(w_0) + r_1 F'(r_0) = 0\,,$$

oder, da man auch die Indices 0 und 1 vertauschen kann, ohne den linken Theil der Gleichung zu ändern:

$$(5)\ \ldots \quad u_0 F'(u_1) + v_0 F'(v_1) + w_0 F'(w_1) + r_0 F'(r_1) = 0$$

als Bedingung für das Ebenenpaar 0, 1, wenn dasselbe zu dem, durch ihre Schnittlinie gelegten, Tangentenebenenpaare der Oberfläche harmonisch sein soll.

Man nennt ein Ebenenpaar harmonische Polarebenen oder harmonische Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung, wenn das, durch die Schnittlinie derselben gelegte, Tangentenebenenpaar der Oberfläche harmonisch ist zu jenem Ebenenpaare. Es ist daher (4) oder (5) die einzige Bedingung, die die Coordinaten zweier Ebenen 0 und 1 zu erfüllen haben, wenn sie harmonische Polarebenen der Oberfläche zweiter Ordnung sein sollen.

Nimmt man an, die eine harmonische Polarebene 0 der Oberfläche sei gegeben, die andere habe die Coordinaten u, v, w, r, so hat man die einzige Bedingung:

$$(6)\ \ldots \quad u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0) + r F'(r_0) = 0,$$

welche ausdrückt, dass sämmtliche harmonische Polarebenen einer gegebenen Ebene 0 durch einen und denselben Punkt gehen, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0, p_0 durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\tfrac{1}{2}F'(u_0) = x_0, \quad \tfrac{1}{2}F'(v_0) = y_0, \quad \tfrac{1}{2}F'(w_0) = z_0, \quad \tfrac{1}{2}F'(r_0) = p_0.$$

Diese Gleichungen sind aber nach (12) der zehnten Vorlesung die Relationen zwischen Pol und Polarebene. Es ist daher (6) die Gleichung des Poles der gegebenen Ebene 0 und man hat den Satz:

Die, einer gegebenen Ebene zugeordneten, harmonischen Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung gehen durch den Pol der gegebenen Ebene.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft eines harmonischen Polarebenenpaares, dass der Pol der einen Ebene in der anderen liegt. Denn die Gleichungen (4) und (5) gehen durch die bekannten Relationen (12) der zehnten Vorlesung zwischen Pol und Polarebene über in:

$$u_0x_1 + v_0y_1 + w_0z_1 + r_0p_1 = 0,$$
$$u_1x_0 + v_1y_0 + w_1z_0 + r_1p_0 = 0,$$

welche Gleichungen nach (9) der zehnten Vorlesung sich auch so darstellen lassen:

$$x_1f'(x_0) + y_1f'(y_0) + z_1f'(z_0) + p_1f'(p_0) = 0,$$
$$x_0f'(x_1) + y_0f'(y_1) + z_0f'(z_1) + p_0f'(p_1) = 0,$$

woraus wir den geometrischen Satz entnehmen:

Die Pole zu einem Paare harmonischer Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung sind harmonische Pole, und die Polarebenen eines harmonischen Polenpaares einer Oberfläche zweiter Ordnung sind harmonische Polarebenen.

Wenn man die bekannten Ausdrücke der Punktcoordinaten des Poles einer Oberfläche zweiter Ordnung nach (12) der zehnten Vorlesung in die Gleichung einer zweiten, in Punktcoordinaten gegebenen, Oberfläche zweiter Ordnung:

$$\varphi(x, y, z, p) = 0,$$

einsetzt, so erhält man die Gleichung einer dritten Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten:

$$\varphi(\tfrac{1}{2}F'(u), \tfrac{1}{2}F'(v), \tfrac{1}{2}F'(w), \tfrac{1}{2}F'(r)) = 0.$$

Setzt man dagegen die Ausdrücke (9) der zehnten Vorlesung in die Gleichung einer zweiten, in Ebenencoordinaten gegebenen, Oberfläche zweiter Ordnung:

$$\Phi(u, v, w, r) = 0,$$

so erhält man die Gleichung einer dritten Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten:

$$\Phi(\tfrac{1}{2}f'(x), \tfrac{1}{2}f'(y), \tfrac{1}{2}f'(z), \tfrac{1}{2}f'(p)) = 0.$$

Diese Bemerkungen beweisen den Satz:

Wenn der Pol einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung eine zweite Oberfläche zweiter Ordnung beschreibt, so berührt seine Polarebene eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung, und umgekehrt, wenn die Polarebene einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sich als Tangentenebene um eine zweite Oberfläche zweiter Ordnung herumbewegt, so beschreibt der Pol eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung.

Die zweite und dritte Oberfläche fallen mit der gegebenen zusammen, wenn entweder der Pol die gegebene Oberfläche durchläuft, oder die Polarebene sich als Tangentenebene um die gegebene Oberfläche herumbewegt.

Wir fügen endlich noch einige Sätze hinzu, die sich nach den entwickelten Principien ebenso von selbst verstehen:

Das anharmonische Verhältniss von zwei Punktepaaren auf einer geraden Linie ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse ihrer Polarebenen.

Das anharmonische Verhältniss von zwei Paar Ebenen, welche sich in derselben geraden Linie schneiden, ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse ihrer Pole.

Die Polarebenen von zwei harmonischen Punktepaaren sind harmonische Ebenen.

Die Pole von zwei harmonischen Ebenenpaaren sind harmonische Punkte.

Die Polarebenen von drei Punktepaaren der Involution bilden wieder eine Involution.

Die Pole von drei Ebenenpaaren der Involution bilden wieder eine Involution.

Es bleibt noch übrig, auf das Verhalten von den Linienpaaren hinzuweisen, die wir in der zehnten Vorlesung reciproke Polaren der Oberfläche zweiter Ordnung genannt haben.

Aus der charakteristischen Eigenschaft eines solchen Linienpaares, dass die Polarebenen der Punkte auf der einen dieser Linien sich in der anderen schneiden, folgt unmittelbar der Satz:

Jede gerade Linie, welche ein Paar reciproke Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung schneidet, schneidet die Oberfläche in einem Punktepaar, welches zu dem Schnittpunktepaar auf den reciproken Polaren harmonisch ist.

Da sich die Polarebenen aller Punkte auf einer gegebenen Ebene in dem Pol dieser Ebene schneiden, so werden auch die Polarebenen der Punkte, welche auf zwei geraden Linien der gegebenen Ebene liegen, durch den Pol der Ebene gehen, woraus die Sätze gefolgert werden können:

Wenn sich zwei gerade Linien im Raume schneiden, so schneiden sich auch die reciproken Polaren der beiden geraden Linien in einem Punkte, welcher der Pol ist der Ebene, in der die beiden geraden Linien liegen, und umgekehrt ist der Schnittpunkt der beiden geraden Linien der Pol der Ebene, in welcher die reciproken Polaren liegen.

Beschreibt eine gerade Linie in irgend welcher Art eine Ebene, so dreht sich ihre reciproke Polare um den Pol der Ebene.

Dreht sich eine gerade Linie um einen Punkt in ihr, so beschreibt ihre reciproke Polare die Polarebene des Punktes.

Wenn eine gerade Linie in einer Ebene sich um einen Punkt in ihr dreht, so dreht sich ihre reciproke Polare um den Pol der Ebene in der Polarebene des Punktes.

Da die reciproke Polare einer gegebenen geraden Linie in der Polarebene eines beliebigen Punktes der gegebenen geraden Linie liegt, so sieht man, dass die reciproke Polare der Tangente der Oberfläche zweiter Ordnung in der Tangen-

tenebene des Berührungspunktes liegen muss. Denn wählt man den Berührungspunkt der Tangente als den beliebigen Punkt, so ist seine Polarebene eben die Tangentenebene. Wählt man aber einen anderen Punkt der Tangentenebene auf der Tangente, so geht seine Polarebene bekanntlich durch den Berührungspunkt. Das heisst:

Die reciproke Polare der Tangente in einem Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung ist in diesem Punkte wieder Tangente der Oberfläche.

Aus der Combination dieses Satzes mit den vorhergehenden folgt ferner:

Wenn eine gerade Linie sich als Tangente einer ebenen Schnittcurve einer Oberfläche zweiter Ordnung fortbewegt, so beschreibt die reciproke Polare der geraden Linie den Tangentenkegel, der die Oberfläche in der ebenen Schnittcurve ringsum berührt, und umgekehrt, wenn eine gerade Linie einen Tangentenkegel der Oberfläche zweiter Ordnung beschreibt, so bewegt sich die reciproke Polare der geraden Linie als Tangente um die Berührungscurve.

Bewegt sich eine gerade Linie als Tangente um eine zweite, von der zum Grunde gelegten Oberfläche zweiter Ordnung verschiedenen, Oberfläche zweiter Ordnung, so bewegt sich die reciproke Polare der Tangente als Tangente um eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung, welche von den Polarebenen der Punkte auf der zweiten Oberfläche berührt wird.

Beschreibt nämlich der Pol die zweite Oberfläche zweiter Ordnung, so bewegt sich seine Polarebene als Tangentenebene um eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung. Die Tangente der zweiten Oberfläche ist die Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte auf der Oberfläche; ihre Polarebenen, die die dritte Oberfläche berühren, liegen ebenfalls unendlich nahe an einander und schneiden sich in der Tangente der letzteren

Oberfläche. Diese Schnittlinie ist aber die reciproke Polare der erwähnten Tangente der zweiten Oberfläche.

Wir schliessen hiermit diese Betrachtungen. Die aus ihnen gewonnenen Sätze über Pol und Polare genügen, um ein Uebertragungs-Princip herzuleiten, welches den Namen des Principes der Reciprocität führt. Dieses Princip, welches die Sätze von der Lage der Figuren verdoppelt, soll in den äusseren Umrissen in dem Folgenden entwickelt werden.

Jede gegebene Figur im Raume, bestehend aus Punkten, geraden Linien, Curven, Ebenen, Oberflächen, kann man sich in doppelter Weise entstanden denken, durch den Punkt oder durch die Ebene. Wählt man den Punkt als die Einheit der Erzeugung, so wird jede Figur der Inbegriff aller Punkte sein, welche in ihr liegen. Wählt man dagegen die Ebene als die Einheit der Erzeugung der Figur, so stellt sich der Punkt als der Inbegriff aller Ebenen dar, welche durch den Punkt gehen; die gerade Linie wird der Inbegriff aller Ebenen sein, welche sich in ihr schneiden, die Curve wird der Inbegriff aller Ebenen sein, welche durch die Tangenten der Curve gehen, die Oberfläche endlich wird der Inbegriff aller ihrer Tangentenebenen sein.

Legt man nun irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung zu Grunde, die den Namen der Directrix führt, und betrachtet jeden Punkt der gegebenen Figur im Raume als den Pol einer Ebene und, in der zweiten Darstellung derselben Figur durch Ebenen, jede Ebene als die Polarebene eines Punktes in Beziehung auf die Directrix, so werden die Ebene und der Punkt eine neue, die zu der gegebenen reciproke Figur, in doppelter Erzeugungsart durch Ebene und Punkt begründen, die der gegebenen Figur in folgender Art entspricht. Jedem Punkte der gegebenen Figur entspricht eine Ebene der reciproken Figur, jeder Ebene der gegebenen Figur entspricht ein Punkt der reciproken, jeder geraden Linie der gegebenen Figur entspricht eine gerade Linie der reciproken, jeder Curve der gegebenen Figur entspricht eine Curve der reciproken, endlich entspricht jeder Oberfläche der gegebenen Figur eine Oberfläche der reciproken Figur. Umgekehrt entspricht auch in derselben Weise jedem Punkte der reciproken Figur eine Ebene der gegebenen, jeder geraden Linie der

reciproken Figur entspricht eine gerade Linie der gegebenen, jeder Curve oder Oberfläche der reciproken Figur entspricht eine Curve oder Oberfläche der gegebenen Figur. Mit anderen Worten, die gegebene Figur ist reciprok zu ihrer reciproken Figur.

Hiernach bedingt jede Eigenschaft einer gegebenen Figur, welche sich auf die Lage ihrer Bestandtheile bezieht, eine entsprechende Eigenschaft der reciproken Figur. Mit anderen Worten, aus jedem Satze über die Lage von Figurentheilen zu einander folgt ein Satz über die Lage der Theile der reciproken Figur.

Die reciproke Figur ist durch die gegebene vollständig bestimmt. Allein die Willkürlichkeit der gegebenen Figur wird eine entsprechende Willkürlichkeit der reciproken Figur zur Folge haben, wodurch eben der, in der reciproken Figur bewiesene, Satz einen gewissen Grad der Allgemeinheit erlangt. Wie weit sich diese Allgemeinheit erstreckt, erfährt man daraus, dass man, von der allgemeinen reciproken Figur ausgehend, die gegebene als die reciproke von ihr bildet. Befindet sich unter diesen Umständen letztere noch in den Grenzen der zulässigen Allgemeinheit, so wird dieses ein Beweis sein, dass das Maass der Allgemeinheit des reciproken Satzes nicht überschritten ist.

Wir wollen dieses Princip an einem einfachen Beispiele erläutern. Wir wählen zu diesem Zwecke aus der neunten Vorlesung den Satz: „Drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden sich in 8 Punkten“.

Dreien Oberflächen zweiter Ordnung einer gegebenen Figur entsprechen drei Oberflächen zweiter Ordnung der reciproken Figur. Jedem Punkte auf einer der gegebenen Oberflächen entspricht eine Tangentenebene der reciproken Oberfläche. Einem Punkte, der zugleich auf den drei gegebenen Oberflächen liegt, entspricht hiernach eine Ebene, welche zugleich die drei reciproken Oberflächen berührt. Die Zahl der Schnittpunkte der gegebenen drei Oberflächen ist also gleich der Zahl der gemeinsamen Tangentenebenen der reciproken Oberfläche. Eine neunte gemeinsame Tangentenebene der reciproken Oberflächen würde auf einen neunten Schnittpunkt der gegebenen drei Oberflächen schliessen lassen. Denn

auch umgekehrt entspricht jeder Tangentenebene einer reciproken Oberfläche ein Punkt auf der gegebenen Oberfläche. Da aber irgend welchen drei Oberflächen zweiter Ordnung einer reciproken Figur immer drei Oberflächen zweiter Ordnung einer gegebenen Figur entsprechen, so hat man im Allgemeinen den Satz der elften Vorlesung: „An drei Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich 8 gemeinsame Tangentenebenen legen".

Weitere Beispiele zur Anwendung des Principes findet man in den vorhergehenden Vorlesungen in Menge vor. Denn alle diejenigen Sätze, welche aus der doppelten geometrischen Deutung derselben Gleichungen hervorgegangen sind, indem man die Variabeln einmal als Punktcoordinaten, das andere Mal als Ebenencoordinaten auffasste, sind reciproke Sätze.

Wir stellen im Folgenden reciproke Sätze neben einander, die sich nach den vorgetragenen Principien eben so leicht einzeln beweisen lassen, als sie nach dem Princip der Reciprocität von einander abgeleitet werden können:

Wenn ein Punktepaar ein harmonisches Polenpaar ist für zwei Oberflächen zweiter Ordnung, so ist dasselbe auch ein harmonisches Polenpaar für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen hindurchgeht.

Wenn ein Ebenenpaar ein harmonisches Polarebenenpaar ist für zwei Oberflächen zweiter Ordnung, so ist dasselbe auch ein harmonisches Polarebenenpaar für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche alle Ebenen berührt, die gemeinschaftliche Tangentenebenen der beiden Oberflächen sind.

Wenn man durch zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung eine gerade Linie legt, so kann man auf ihr ein Punktepaar bestimmen, welches harmonisch ist zu jedem Schnittpunktepaare der geraden Linie und der Oberflächen. Dieses Punktepaar ist ein Paar harmonischer Pole für jede der beiden Oberflächen, also nach dem ersten Satze auch ein harmonisches Polenpaar für jede dritte Oberfläche zweiter Ord-

nung, welche durch die Schnittcurve der gegebenen Oberflächen hindurchgeht. Erinnert man sich nun der Definition für drei Punktepaare der Involution, so folgt daraus der Satz und sein reciproker:

Jede gerade Linie schneidet drei Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen eine durch die Schnittcurve der beiden anderen hindurchgeht, in Punkten der Involution.

Wenn man durch eine gerade Linie Tangentenebenen legt an drei Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen eine alle gemeinsamen Tangentenebenen der beiden anderen berührt, so bilden diese Tangentenebenen eine Involution.

Andere reciproke Sätze der bezeichneten Art sind folgende:

Die Polarebenen eines gegebenen Punktes in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 8 feste Punkte im Raume gehen, schneiden sich in einer und derselben geraden Linie.

Die Pole einer gegebenen Ebene in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 feste Ebenen berühren, liegen in einer geraden Linie.

Die Polarebenen eines gegebenen Punktes in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 feste Punkte im Raume gehen, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Die Pole einer gegebenen Ebene in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 feste Ebenen berühren, liegen in einer und derselben Ebene.

Dreizehnte Vorlesung.

Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung. Transformation der Coordinaten mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen.

Der Pol einer Ebene, die in ihrer ganzen Ausdehnung in das Unendliche fällt, hat rücksichtlich seiner Oberfläche zweiter Ordnung eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Legt man nämlich eine Sehne der Oberfläche durch den Pol, so schneidet die Sehne die Oberfläche in einem Punktepaar, welches harmonisch ist zu dem Pol und dem Schnittpunkte der Sehne mit der Polarebene. Dieser letztere Schnittpunkt liegt aber in dem Unendlichen. Mithin halbirt der Pol die Sehne, so wie jede andere Sehne der Oberfläche, welche durch ihn geht.

Man nennt Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung einen Punkt, der alle durch ihn gezogenen Sehnen der Oberfläche halbirt. Es ist also der Pol einer Ebene in dem Unendlichen der Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung. Da es nur einen Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung giebt, so kann dieses als eine zweite Definition des Mittelpunktes dienen. Denn gäbe es zwei Mittelpunkte, so würde die durch sie gelegte Sehne der Oberfläche in zwei verschiedenen Punkten halbirt. Auf Grund dieser zweiten Definition folgt aus den letzten Sätzen der vorhergehenden Vorlesung:

Die Mittelpunkte der Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 feste Ebenen berühren, liegen auf einer geraden Linie.

Die Mittelpunkte der Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 feste Ebenen berühren, liegen auf einer Ebene.

Die analytische Bestimmung des Mittelpunktes einer Oberfläche zweiter Ordnung kann in doppelter Art geschehen, indem

man entweder von der Gleichung der Oberfläche in Punktcoordinaten oder von der Gleichung derselben Oberfläche in Ebenencoordinaten ausgeht. Im ersteren Falle sei die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z, p) = 0.$$

Aus (9) der zehnten Vorlesung entnehmen wir die Relationen zwischen den Coordinaten des Poles (x, y, z, p) und seiner Polarebene (u, v, w, r):

$$(2) \quad \tfrac{1}{2}f'(x) = u, \quad \tfrac{1}{2}f'(y) = v, \quad \tfrac{1}{2}f'(z) = w, \quad \tfrac{1}{2}f'(p) = r.$$

Da die Polarebene aber in das Unendliche fällt, wenn $u = v = w = 0$, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche die Gleichungen:

$$(3) \quad \ldots \quad f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0.$$

Von diesen drei linearen Gleichungen hat auch jede ihre geometrische Bedeutung. Sie drücken nämlich analytisch aus die Polarebenen der drei Punkte auf den Coordinatenaxen, welche in dem Unendlichen liegen. Dass sich diese drei Polarebenen in dem Mittelpunkte der Oberfläche schneiden, lässt sich auch auf geometrischem Wege leicht einsehen.

Die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche ergeben sich aus den Gleichungen (3), wenn man $p = 1$ setzt. In dieser Voraussetzung bestimmen die Gleichungen (3) die Werthe der Variabeln, welche die Function $f(x, y, z, 1)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, woraus sich folgende Regel abnehmen lässt:

Die Werthe der Variabeln, welche eine ganze Function des zweiten Grades $f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sind die Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z) = 0$.

Um auf analytischem Wege den Mittelpunkt zu bestimmen für eine Oberfläche zweiter Ordnung, die durch ihre Gleichung in Ebenencoordinaten gegeben ist:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(u, v, w, r) = 0,$$

erinnern wir an die Gleichung des Poles einer Ebene (u_0, v_0, w_0, r_0) nach (6) der zwölften Vorlesung:

$$(5) \ldots \quad u_0 F'(u) + v_0 F'(v) + w_0 F'(w) + r_0 F'(r) = 0.$$

Die Ebene fällt in das Unendliche, wenn $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, und ihr Pol, der Mittelpunkt der Oberfläche, erhält zur Gleichung:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F'(r) = 0.$$

Diese Gleichung ist bekanntlich die Bedingung, unter welcher die in r quadratische Gleichung (4) zwei gleiche Wurzeln hat.

Wenn der Mittelpunkt der Oberfläche zugleich der Coordinatenanfangspunkt sein soll, so müssen die Gleichungen (3) erfüllt werden für $x = y = z = 0$. Diese drei Bedingungen drücken aber aus, dass in der Gleichung der Oberfläche (1) die drei Glieder fehlen, welche die erste Potenz der Variable p als Factor haben.

Soll die Gleichung (6) des Mittelpunktes der Oberfläche zugleich die des Coordinatenanfangspunktes sein, so müssen in ihr die drei ersten Glieder verschwinden, welche respective mit u, v, w multiplicirt sind, das heisst, in der Gleichung (4) der Oberfläche müssen die drei Glieder fehlen, welche die erste Potenz der Variable r als Factor haben.

Umgekehrt, wenn die genannten drei Glieder in der Gleichung (1) oder (4) verschwinden, so ist der Coordinatenanfangspunkt der Mittelpunkt der Oberfläche. Denn im ersten Falle bleibt die Gleichung (1) ungeändert, wenn man für p setzt $-p$, welches geometrisch ausdrückt, dass jede, durch den Coordinatenanfangspunkt gezogene, Sehne der Oberfläche in diesem Punkte halbirt wird; und im zweiten Falle bleibt die Gleichung (4) ungeändert, wenn man für r setzt $-r$, welches beweiset, dass parallele Tangentenebenen der Oberfläche von dem Coordinatenanfangspunkt in entgegengesetzter Richtung gleich weit abstehen.

Wir werden diese Bemerkung benutzen, um auf einem zweiten Wege die Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche zu bestimmen.

Hat man irgend ein zweites, dem zum Grunde gelegten rechtwinkligen Coordinatensystem paralleles, Coordinatensystem,

dessen Anfangspunkt die Coordinaten a, b, c hat, so ergeben sich aus der geometrischen Betrachtung leicht folgende Relationen zwischen den Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes im ersten und den Coordinaten X, Y, Z desselben Punktes in dem zweiten Systeme:

$$x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c.$$

Wählt man aber statt der rechtwinkligen Coordinaten die homogenen Coordinaten, so ergeben sich daraus folgende Transformationsformeln:

$$(7) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= X + aP, & X &= x - ap, \\ y &= Y + bP, & Y &= y - bp, \\ z &= Z + cP, & Z &= z - cp, \\ p &= P, & P &= p. \end{aligned}$$

Die Gleichung einer Ebene:

$$ux + vy + wz + rp = 0$$

nimmt durch diese Substitutionen, wenn wir mit U, V, W, R die homogenen Coordinaten der Ebene bezeichnen bezüglich auf das zweite Coordinatensystem, die Gestalt an:

$$UX + VY + WZ + RP = 0,$$

und die Vergleichung der linken Theile beider Gleichungen ergiebt folgende Transformationsformeln der Ebenencoordinaten:

$$(8) \ldots \quad \begin{aligned} u &= U, & U &= u, \\ v &= V, & V &= v, \\ w &= W, & W &= w, \\ r &= R - aU - bV - cW, & R &= r + au + bv + cw. \end{aligned}$$

Durch diese Transformationsformeln gehen die Gleichungen (1) und (4) der Oberfläche zweiter Ordnung über in:

$$(9) \ldots \quad f(X + aP,\ Y + bP,\ Z + cP,\ P) = 0.$$

$$(10) \ldots \quad F(U,\ V,\ W,\ R - aU - bV - cW) = 0.$$

Es sind dieses die Gleichungen derselben Oberfläche zweiter Ordnung, bezogen auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt die rechtwinkligen Punktcoordinaten a, b, c

hat. Die Grade der Gleichungen sind durch die Transformation ungeändert geblieben.

Der Mittelpunkt der Oberfläche ist zugleich Coordinatenanfangspunkt, wenn a, b, c, 1 für x, y, z, p gesetzt den Gleichungen (3) genügen, oder wenn diese Grössen proportional sind den Coefficienten von u, v, w, r in der Gleichung (6).

Diese, die Coordinaten a, b, c des Mittelpunktes der Oberfläche bestimmenden, Gleichungen erhält man auch durch Entwickelung der Gleichungen (9) und (10), wenn man entweder die drei, mit der ersten Potenz von P multiplicirten, Glieder einzeln gleich 0 setzt, oder wenn man die drei, mit der ersten Potenz von R multiplicirten, Glieder verschwinden lässt.

Wir können daher, mögen wir Gleichungen in Punkt- oder in Linien-Coordinaten im Auge haben, sagen:

Wenn man die homogene Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung bezieht auf ein paralleles Coordinatensystem, zu welchem Zwecke die Substitutionen (7) oder (8) dienen, so verschwinden in derselben die drei, mit der ersten Potenz der letzten Variable multiplicirten, Glieder in dem Falle, dass der Coordinatenanfangspunkt des parallelen Systems der Mittelpunkt der Oberfläche ist.

Die einzige Ausnahme davon bildet der Fall, wenn der Mittelpunkt der Oberfläche in das Unendliche fällt, denn in dieser Voraussetzung kann man den Mittelpunkt nicht zum Coordinatenanfangspunkt machen.

Um die analytische Bedingung dieses Falles festzustellen, nehmen wir an, dass die Gleichungen der Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten und in Ebenencoordinaten seien:

$$(11) \ldots \quad f = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots . = 0,$$

$$(12) \ldots \quad F = e_{00}u^2 + 2e_{01}uv + e_{11}v^2 + \ldots . = 0.$$

Den Mittelpunkt der Oberfläche $f = 0$ bestimmen die Gleichungen (3):

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(y) = a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(z) = a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p = 0.$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen die rechtwinkligen Coordinaten $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$ des Mittelpunktes als die Unbekannten und löset die Gleichungen auf, so stellen sich bekanntlich die Werthe der Unbekannten als Brüche dar mit demselben Nenner:

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad D = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Verschwindet dieser Nenner, so werden die Coordinaten des Mittelpunktes unendlich gross, und der Mittelpunkt fällt in das Unendliche.

Die Gleichung des Mittelpunktes der Oberfläche $F = 0$ ist nach (6):

$$\tfrac{1}{2}F'(r) = e_{30}u + e_{31}v + e_{32}w + e_{33}r = 0,$$

woraus sich die rechtwinkligen Coordinaten a, b, c des Mittelpunktes der Oberfläche ergeben:

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad a = \frac{e_{30}}{e_{33}}, \quad b = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad c = \frac{e_{32}}{e_{33}},$$

welche unendlich gross werden, wenn der gemeinsame Nenner verschwindet.

Der Mittelpunkt der Oberfläche $f = 0$ oder $F = 0$ fällt daher in das Unendliche unter der Bedingung:

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D = 0 \text{ oder } e_{33} = 0.$$

Man unterscheidet nun Oberflächen zweiter Ordnung, welche einen Mittelpunkt haben, von den Oberflächen zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt in das Unendliche fällt, von welchen man auch sagt, dass sie keinen Mittelpunkt haben. Jede von den Gleichungen (15) ist die Bedingung für die letzte Gattung von Oberflächen zweiter Ordnung. Ihre homogenen Gleichungen lassen sich nicht auf die Form zurückführen, in welcher die, mit der ersten Potenz der letzten Variable multiplicirten, Glieder gänzlich fehlen.

Vierzehnte Vorlesung.

Criterium des Kegels zweiter Ordnung. Tangentenkegel der Oberfläche zweiter Ordnung.

Unter den Oberflächen zweiter Ordnung mit einem Mittetpunkt verdient eine besondere Beachtung diejenige, deren Mittelpunkt auf der Oberfläche selbst liegt.

Es sei:

(1) . . . $f = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots = 0$

die Gleichung einer solchen Oberfläche. Die Coordinaten des Mittelpunktes derselben bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0.$$

Setzt man die Werthe dieser Coordinaten in die Gleichung der Oberfläche:

$$2f = xf'(x) + yf'(y) + zf'(z) + pf'(p) = 0,$$

so muss in dem vorliegenden Falle die Gleichung erfüllt werden. Daraus erhält man aber:

$$f'(p) = 0.$$

Wenn daher die Oberfläche (1) die angegebene Eigenschaft haben soll, so müssen sich Werthe der Variabeln bestimmen lassen, welche den vier Gleichungen zu gleicher Zeit genügen:

(2) . . . $f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0, \quad f'(p) = 0,$

von welchen die drei ersten den Mittelpunkt der Oberfläche bestimmen und die letzte ausdrückt, dass der Mittelpunkt auf der Oberfläche selbst liegt.

Es liegen hier vier homogene Functionen $\frac{1}{2}f'(x)$, $\frac{1}{2}f'(y)$, $\frac{1}{2}f'(z)$, $\frac{1}{2}f'(p)$ der vier Variabeln vor, welche für ein System Werthe der Variabeln verschwinden. Es verschwindet also nach Satz (8) der achten Vorlesung auch die Determinante dieser Functionen, und man hat die Bedingungsgleichung:

(3) . . . . $A = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

zwischen den Coefficienten in der Gleichung (1) der Oberfläche von der bezeichneten Art.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft dieser Oberflächen zweiter Ordnung, dass die Polarebenen aller Punkte des Raumes sämmtlich durch den Mittelpunkt der Oberfläche gehen. Denn die Gleichungen der Polarebenen aller Punkte des Raumes werden nach (2) für den Mittelpunkt erfüllt.

Um eine zweite Eigenschaft dieser Gattung Oberflächen herzuleiten, bezeichnen wir mit x, y, z, p die Coordinaten des Mittelpunktes, mit x_0, y_0, z_0, p_0 die Coordinaten eines beliebig auf der Oberfläche gewählten Punktes o. Die Coordinaten $x+\lambda x_0$, $y+\lambda y_0$, $z+\lambda z_0$, $p+\lambda p_0$ eines beliebigen Punktes auf der Verbindungslinie beider genügen der Gleichung:

$$(4) \ldots f(x+\lambda x_0,\ y+\lambda y_0,\ z+\lambda z_0,\ p+\lambda p_0)=0,$$

welchen Werth auch der unbestimmte Factor λ habe. Denn entwickelt man die Gleichung nach Potenzen von λ, so verschwindet das erste Glied, weil der Mittelpunkt auf der Oberfläche liegt. Ebenso verschwindet das letzte Glied der Entwickelung, weil der Punkt o auf der Oberfläche liegt. Es verschwindet endlich der Factor der ersten Potenz von λ:

$$(5) \ldots \quad x_0 f'(x)+y_0 f'(y)+z_0 f'(z)+p_0 f'(p)=0$$

auf Grund der Gleichungen (2). Die Verbindungslinie fällt mithin ihrer ganzen Länge nach in die Oberfläche, und die ganze Oberfläche kann als entstanden gedacht werden durch Drehung einer geraden Linie um den Mittelpunkt.

Eine solche Oberfläche nennt man einen Kegel. Die hervorgehobenen Oberflächen sind also Kegel zweiter Ordnung, und die Gleichung (3) ist die Bedingungsgleichung für den Kegel (1). Er charakterisirt sich dadurch, dass sein Mittelpunkt, die Spitze des Kegels, in der Oberfläche selbst liegt.

Es bleibt noch übrig nachzuweisen, dass auch jeder Kegel $f=0$ der zweiten Ordnung, der durch Drehung einer geraden Linie um seine Spitze entstanden ist, der Gleichung (3) genügt. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass x, y, z, p die Coordinaten der Spitze und x_0, y_0, z_0, p_0 die Coordinaten eines beliebigen Punktes o auf der Kegelfläche seien. Da nun

jeder Punkt der Verbindungslinie dieser beiden Punkte auf der Kegelfläche liegt, so wird für jeden Werth von λ der Gleichung (4) Genüge geschehen. Durch Entwickelung geht die Gleichung (4) über in (5). Dieser Gleichung wird nun für jeden Punkt o des Kegels genügt. Sie ist aber, wenn man den Punkt o als variabel betrachtet, die Gleichung einer Ebene. Es müsste also entweder der letzteren Gleichung für jeden Punkt o des Kegels genügt werden können, welcher auch ausserhalb der Ebene liegt, oder die Ebene müsste ein Theil des Kegels sein, oder endlich müsste der Gleichung (5) durch die Gleichungen (2) Genüge geschehen. Der erste Fall ist als unstatthaft zu verwerfen. In dem zweiten Falle wird die Function f in das Product von zwei linearen Factoren zerfallen und der Kegel in ein Ebenenpaar. Dann genügt aber jeder Punkt der Schnittlinie der beiden Ebenen den Gleichungen (2). Es bleibt also nur der dritte Fall übrig, in welchem man die Gleichungen (2) hat, aus welchen durch Elimination die Bedingung (3) hervorgeht.

Die Gleichung des Kegels zweiter Ordnung in Punktcoordinaten lässt sich nicht, so wie die Gleichungen aller übrigen Oberflächen zweiter Ordnung, durch Ebenencoordinaten ausdrücken. Denn die reciproke Function F von f erhält, da nach (3) $A = 0$ ist, nach (18) der zehnten Vorlesung einen unendlich grossen Factor $\frac{1}{A}$. [Lässt man diesen Factor fort, so stellt die Gleichung $A \,.\, F = 0$ nicht mehr den Kegel dar, sondern diese Gleichung ist das Quadrat der Gleichung eines Punktes, nämlich der Spitze des Kegels.]

Es sei nun die Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(6) \;.\;.\;.\; f = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

welche sich von der Gleichung des Kegels (1) nur dadurch unterscheiden soll, dass der Coefficient a_{33}, der dort durch die Gleichung (3) als Function der anderen Coefficienten bestimmt ist, in dieser Gleichung irgend einen Werth habe.

Die drei ersten Gleichungen (2) bestimmen unter dieser Voraussetzung die Spitze des Kegels (1), wie den Mittelpunkt der Oberfläche (6). Es fallen also beide Punkte in einen zusam-

men. Zieht man die Gleichung des Kegels von der Gleichung der Oberfläche ab, so erhält man:

$$p^2 = 0,$$

die Gleichung eines in eine Ebene zusammenfallenden Ebenenpaares in dem Unendlichen. Dieses beweiset, dass der Kegel die Oberfläche in dem Unendlichen ringsum berührt.

Einen solchen Kegel, dessen Spitze in dem Mittelpunkte der Oberfläche zweiter Ordnung liegt und der die Oberfläche ringsum berührt, nennt man Asymptoten-Kegel der Oberfläche zweiter Ordnung. Daraus ergiebt sich folgende Regel:

Aus der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in homogenen Punktcoordinaten erhält man die Gleichung des Asymptoten-Kegels der Oberfläche, wenn man dem Coefficienten des mit dem Quadrate der letzten Variable multiplicirten Gliedes einen solchen Werth beilegt, dass die Oberfläche ein Kegel wird.

Legen wir den Anfangspunkt eines parallelen Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Oberfläche (6), zu welchem Zwecke die Substitutionen (7) der vorhergehenden Vorlesung dienen, wenn a, b, c, 1 die Coordinaten des Mittelpunktes bedeuten, so verschwinden, wie man gesehen hat, die drei mit der ersten Potenz von P multiplicirten Glieder und das mit dem Quadrate von P multiplicirte Glied wird:

$$f(a, b, c, 1)\, P^2.$$

Im Falle die Oberfläche ein Kegel ist, verschwindet auch dieses Glied, weil der Mittelpunkt des Kegels auf seiner Oberfläche liegt, also $f(a, b, c, 1) = 0$ ist. Es wird daher durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in die Spitze des Kegels (1) die Gleichung desselben:

$$(7) \quad \ldots \quad f(X, Y, Z) = a_{00} X^2 + a_{11} Y^2 + a_{22} Z^2 + \\ + 2 a_{12} YZ + 2 a_{20} ZX + 2 a_{01} XY = 0,$$

eine Gleichung, welche aus der allgemeinen Gleichung (1) des Kegels zweiter Ordnung hervorgeht, indem man $p = 0$ und für x, y, z respective setzt X, Y, Z.

Da man eine von den 6 in die Gleichung (7) eingehenden Constanten durch Division gleich der Einheit machen kann, so gehen in die Gleichung nur 5 willkürliche Constanten in linearer Weise ein, von welchen allein die Natur des Kegels abhängt. Diese 5 Constanten werden unzweideutig durch 5 Punkte des Kegels bestimmt sein. Man hat daher den Satz, auf welchen wir in der vierten Vorlesung hingewiesen haben:

Durch beliebige 5 von einem und demselben Punkte ausgehende gerade Linien lässt sich nur ein Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen;

oder mit anderen Worten:

Der Kegel zweiter Ordnung ist durch 5 seiner Kanten unzweideutig bestimmt.

Dass jede durch die Spitze des Kegels zweiter Ordnung gelegte Ebene den Kegel nur in zwei geraden Linien schneidet, eine Voraussetzung, die wir ebenfalls an der bezeichneten Stelle gemacht haben, geht daraus hervor, dass eine gerade Linie den Kegel zweiter Ordnung, als speciellen Fall der Oberfläche zweiter Ordnung, nur in zwei Punkten schneidet.

Die Gleichung der Polarebene eines beliebigen Punktes X, Y, Z, P rücksichtlich des Kegels (7) ist, wenn man mit X_0, Y_0, Z_0, P_0 die variabeln Coordinaten bezeichnet:

$$(8) \quad \ldots \quad X_0 f'(X) + Y_0 f'(Y) + Z_0 f'(Z) = 0,$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht. Es geht mithin die Polarebene eines beliebigen Punktes im Raume immer durch die Spitze des Kegels. Eine Ausnahme davon macht die Spitze des Kegels selbst. Denn die Gleichung (8) ihrer Polarebene wird illusorisch.

Da in die Gleichung (8) die Variable P gar nicht eingeht, so werden die verschiedenen Punkte auf einer durch die Spitze des Kegels gehenden geraden Linie alle dieselbe Polarebene haben. Eine Ebene, die nicht durch die Spitze des Kegels geht, hat keinen Pol, weil die Polarebenen aller Punkte des Raumes durch die Spitze des Kegels gehen. Man wird daher zu Polarebenen des Kegels nur solche Ebenen

wählen können, welche durch die Spitze gehen. Bezeichnen wir aber mit U, V, W, R die Coordinaten der Polarebene, so ergeben sich hiernach aus (8) folgende Relationen zwischen den Coordinaten des Poles und den Coordinaten der Polarebene des Kegels:

$$(9) \quad \tfrac{1}{2}f'(X) = U, \quad \tfrac{1}{2}f'(Y) = V, \quad \tfrac{1}{2}f'(Z) = W, \quad 0 = R.$$

Wenn nun $F(U, V, W)$ die reciproke Function der Function $f(X, Y, Z)$ ist, so hat man erstens auf Grund der Substitutionen (9):

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad F(U, V, W) = f(X, Y, Z),$$

und zweitens die Auflösungen der linearen Gleichungen (9):

$$(11) \quad \tfrac{1}{2}F'(U) = X, \quad \tfrac{1}{2}F'(V) = Y, \quad \tfrac{1}{2}F'(W) = Z, \quad R = 0.$$

Lässt man den Pol in die Kegelfläche fallen, so erhält man aus (10) und (11) die Bedingungen für die Tangentenebenen des Kegels:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} F(U, V, W) &= 0, \\ R &= 0, \end{aligned}$$

oder allgemeiner, wenn man mit B irgend einen linearen homogenen Ausdruck der Ebenencoordinaten bezeichnet:

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} F(U, V, W) + BR &= 0, \\ R &= 0, \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen mit den 10 darin vorkommenden Coefficienten stellt eine Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten dar, und die letzte ist die Gleichung der Spitze des Kegels. Setzt man daher in die beiden Gleichungen (13) die Werthe von U, V, W, R aus (8) der dreizehnten Vorlesung, um die Oberfläche und die Spitze des Kegels auf das ursprüngliche Coordinatensystem zu beziehen, so nehmen jene Gleichungen (13) die Form an:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} F(u, v, w, r) &= 0, \\ A &= 0, \end{aligned}$$

indem die zweite lineare Gleichung die Spitze des Kegels darstellt.

Man sieht hieraus, dass der Kegel zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten durch zwei Gleichungen ausgedrückt wird

und zwar als Tangentenkegel irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung mit einer beliebigen Spitze. Hiernach ist man zu dem Schlusse berechtiget:

Der Tangentenkegel einer Oberfläche zweiter Ordnung ist selbst eine Oberfläche zweiter Ordnung.

Da in die Gleichungen des Kegels (12) in Ebenencoordinaten mit gegebener Spitze im Coordinatenanfangspunkte nur die Verhältnisse von 6 Constanten in linearer Weise eingehen, so hat man den Satz:

Der Kegel zweiter Ordnung ist durch 5 seiner Tangentenebenen unzweideutig bestimmt, und jede 5 Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, lassen sich als 5 Tangentenebenen eines unzweideutig bestimmten Kegels zweiter Ordnung betrachten.

Bezeichnen wir mit X, Y, Z die Coordinaten irgend eines Punktes der in der Spitze des Kegels (12) auf der Tangentenebene (U, V, W, R) errichteten Normale, so hat man:

$$U = \lambda X, \quad V = \lambda Y, \quad W = \lambda Z.$$

Setzt man diese Werthe in (12), so erhält man:

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(X, Y, Z) = 0,$$

die Gleichung eines neuen Kegels zweiter Ordnung, welcher beschrieben wird von den in der Spitze des Kegels (12) auf den Tangentenebenen desselben errichteten Normalen.

Ebenso lässt sich aus (7) nachweisen, dass:

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{array}{c} f(U, V, W) = 0, \\ R = 0 \end{array}$$

die Gleichungen des Kegels sind in Ebenencoordinaten, welcher von den durch die Spitze des Kegels (7) gelegten Ebenen, die auf den Kanten dieses Kegels senkrecht stehen, berührt wird.

Diese Bemerkungen drücken wir als reciproke Sätze aus,

von welchen in Uebertragung auf die Kugeloberfläche in der vierten Vorlesung bereits Erwähnung gethan worden ist:

Wenn eine Ebene sich als Tangentenebene um einen *K*egel zweiter Ordnung herumbewegt, so beschreibt die in der Spitze des Kegels auf der Ebene errichtete Normale wieder einen Kegel zweiter Ordnung.

Wenn eine gerade Linie durch Drehung um einen Punkt in ihr einen Kegel zweiter Ordnung beschreibt, so berührt die Ebene, welche in dem Drehungspunkte auf der geraden Linie senkrecht steht, wieder einen Kegel zweiter Ordnung.

Um den Tangentenkegel einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung auch durch Punktcoordinaten auszudrücken, stellen wir folgende Betrachtungen an:

Man weiss, wenn $f=0$ und $\varphi=0$ die Gleichungen zweier gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung sind, dass die Gleichung:

$$f+\lambda\varphi=0$$

jede Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, welche durch die Schnittcurve der gegebenen Oberflächen hindurchgeht. Ist φ das Product zweier linearer Ausdrücke U_0, U_1, so ist die zweite gegebene Oberfläche ein Ebenenpaar $U_0=0$, $U_1=0$.

Diese Ebenen stellen wir dar als die Polarebenen zweier Punkte (x_0, y_0, z_0, p_0), (x_1, y_1, z_1, p_1) rücksichtlich der ersten gegebenen Oberfläche, indem wir setzen:

$$(17)\ \ldots\quad \begin{aligned} U_0 &= xf'(x_0)+yf'(y_0)+zf'(z_0)+pf'(p_0),\\ U_1 &= xf'(x_1)+yf'(y_1)+zf'(z_1)+pf'(p_1). \end{aligned}$$

Hiernach ist:

$$(18)\ \ldots\ldots\ldots\quad f+\lambda U_0 U_1=0$$

mit dem willkürlichen Factor λ der analytische Ausdruck für alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurven der Ebenen $U_0=0$, $U_1=0$ und der Oberfläche zweiter Ordnung $f=0$ hindurchgehen.

Damit die Oberfläche (18) aber vollständig bestimmt werde, muss noch ein Punkt in ihr gegeben sein, der im

Raume willkürlich gewählt werden kann. Wählt man den Pol der Ebene $U_0 = 0$, so ergiebt sich der diesem Punkte entsprechende Werth von λ aus (18), wenn man für die Variabeln in jener Gleichung die Coordinaten des Punktes setzt. Setzt man nun den so bestimmten Werth von λ wieder in die Gleichung (18), so erhält man die Gleichung:

$$(19)\quad 2f(x,y,z,p)\{x_0 f'(x_1)+y_0 f'(y_1)+z_0 f'(z_1)+p_0 f'(p_1)\}$$
$$-\{x f'(x_0)+y f'(y_0)+z f'(z_0)+p f'(p_0)\}$$
$$\times\{x f'(x_1)+y f'(y_1)+z f'(z_1)+p f'(p_1)\}=0$$

der Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch den Schnitt des Ebenenpaares $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ mit der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ und zugleich durch den Pol der ersten Ebene hindurchgeht. Die Bemerkung, dass die Gleichung (19) ungeändert bleibt, wenn man die Indices 0 und 1 mit einander vertauscht, geometrisch gedeutet, giebt den Satz:

Wenn man durch den Schnitt zweier Ebenen mit einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung eine andere Oberfläche zweiter Ordnung hindurchlegt, welche durch den Pol einer jener Ebenen geht, so geht diese Oberfläche auch durch den Pol der anderen Ebene.

Fallen die beiden Ebenen in eine zusammen und damit auch ihre Pole in einen und denselben Punkt, so erhält man eine Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(20)\quad \ldots\ 4f(x, y, z, p) \cdot f(x_0, y_0, z_0, p_0)$$
$$-\{xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0) + pf'(p_0)\}^2 = 0,$$

welche die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ in der durch die Ebene $U_0 = 0$ hervorgebrachten Schnittcurve berührt. Dass diese Oberfläche zweiter Ordnung aber ein Kegel ist, ersieht man daraus, dass die vier partiellen Differentialquotienten des linken Theiles der Gleichung (20), nach den Variabeln genommen, verschwinden, wenn man in ihnen für die Variabeln die Coordinaten x_0, y_0, z_0, p_0 des Poles jener Ebene setzt. Dieser Pol ist folglich die Spitze des Kegels zweiter Ordnung.

Die Gleichung (20) stellt also den Tangentenkegel dar, welcher von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0, z_0, p_0) als Spitze an die Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ gelegt ist. Seine Basis ist die Schnittcurve der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ und einer beliebigen Ebene $U_0 = 0$. Bezeichnet man daher mit dem Namen Kegelschnitt die Schnittcurve einer Ebene und eines Kegels zweiter Ordnung, so hat man den Satz:

Alle Ebenen schneiden eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung in Kegelschnitten.

Denn die Schnittcurve einer Ebene und einer Oberfläche zweiter Ordnung liegt auf dem Tangentenkegel, der von dem Pole der Ebene an die Oberfläche gelegt ist.

Der Kegelschnitt wurde im Vorhergehenden definirt als die Schnittcurve eines Kegels zweiter Ordnung und einer Ebene. Da nun nach einem vorangegangenem Satze der Kegel durch 5 seiner Kanten unzweideutig bestimmt ist, so folgt daraus:

Der Kegelschnitt ist durch 5 Punkte auf ihm unzweideutig bestimmt.

Fällt die Spitze des Tangentenkegels in die gegebene Oberfläche, so verschwindet das erste Glied der Gleichung (20), und der übrige Theil der Gleichung stellt die Tangentenebene der gegebenen Oberfläche $f = 0$ dar.

Um einen anderen speciellen Fall des Tangentenkegels hervorzuheben, stellen wir die Gleichung (20) desselben so dar:

$$2f(x, y, z, p)\,\{x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0) + p_0 f'(p_0)\}$$
$$- \{x\, f'(x_0) + y\, f'(y_0) + z\, f'(z_0) + p\, f'(p_0)\}^2 = 0.$$

Fällt die Spitze dieses Tangentenkegels in den Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$, so hat man $f'(x_0) = 0$, $f'(y_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, wodurch die Gleichung sich also vereinfacht:

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad f(x, y, z, p) - \frac{f'(p_0)}{2p_0} \cdot p^2 = 0.$$

Dieses ist aber die Gleichung des Asymptotenkegels. Denn es ist der Coefficient des Quadrates der letzten Variable in der homogenen Gleichung $f=0$ der gegebenen Oberfläche so bestimmt, dass die Oberfläche ein Kegel wird.

Fünfzehnte Vorlesung.

Criterium der Grenzfläche zweiter Ordnung. Die Schnittcurve einer Ebene und einer Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche zweiter Ordnung aufgefasst.

Wenn es unter den, durch ihre Gleichungen in Punktcoordinaten gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung solche giebt, die Kegel, welche sich analytisch nicht durch eine Gleichung in Ebenencoordinaten darstellen lassen, so muss die Reciprocität unserer Betrachtungsweise nothwendig auf analytische Ausdrücke der Oberflächen zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten führen, welche sich in Punktcoordinaten eben so wenig durch eine Gleichung darstellen lassen. Diese Gattung von Oberflächen zweiter Ordnung wird den Gegenstand der gegenwärtigen Vorlesung bilden.

Wir werden Grenzfläche der zweiten Ordnung diejenige Oberfläche zweiter Ordnung nennen, in Rücksicht auf welche die Pole aller Ebenen im Raume auf einer und derselben Ebene liegen.

Es sei:

$$(1) \ldots \quad F = e_{00}u^2 + 2e_{01}uv + e_{11}v^2 + \ldots\ldots = 0$$

die Gleichung einer Grenzfläche in Ebenencoordinaten. Bezeichnet man mit u_0, v_0, w_0, r_0 die variabeln Coordinaten irgend einer Ebene im Raume und mit u, v, w, r die Coordinaten einer gegebenen Ebene, so ist die Gleichung des Poles der letzteren Ebene:

$$(2) \ldots \quad u_0 F'(u) + v_0 F'(v) + w_0 F'(w) + r_0 F'(r) = 0.$$

Soll dieser Pol aber für alle, durch ihre Coordinaten u_0, v_0, w_0, r_0 gegebenen Ebenen in einer und derselben Ebene liegen, so müssen bestimmte Werthe von u, v, w, r dieser Gleichung genügen unabhängig von den Werthen der Coordinaten u_0, v_0, w_0, r_0, das heisst, es müssen diese Werthe den vier Gleichungen genügen:

$$(3) \ldots \quad F'(u) = 0, \quad F'(v) = 0, \quad F'(w) = 0, \quad F'(r) = 0.$$

Diese vier Gleichungen mit den vier Unbekannten u, v, w, r sind also die Bedingungen für die Grenzfläche zweiter Ordnung (1).

Eliminirt man aus ihnen die Unbekannten u, v, w, r, so erhält man die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der Gleichung (1) der Grenzfläche zweiter Ordnung:

$$(4) \ldots\ldots \quad E = \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & e_{03} \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & e_{23} \\ e_{30}, & e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dass die Grenzfläche in Punktcoordinaten $f = 0$ sich nicht durch diese eine Gleichung darstellen lässt, ist daraus ersichtlich, dass analog (18) der zehnten Vorlesung:

$$(5) \ldots \quad f = -\frac{1}{E} \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & e_{03}, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & e_{13}, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & e_{23}, & z \\ e_{30}, & e_{31}, & e_{32}, & e_{33}, & p \\ x, & y, & z, & p, & 0 \end{vmatrix}$$

und dass die Function f, welche gleich 0 gesetzt die Gleichung der Grenzfläche in Punktcoordinaten sein würde, den Factor $\frac{1}{E} = \infty$ mit sich führt.

Was die Ebene anbelangt, in welcher die Pole aller Ebenen des Raumes liegen, so werden die Coordinaten derselben durch die Gleichungen (3) unzweideutig bestimmt. Wir werden diese Ebene die Ebene der Grenzfläche zweiter Ordnung nennen.

Da die Pole aller Ebenen des Raumes in ihr liegen, so liegen auch die Berührungspunkte der Tangentenebenen der

Grenzfläche in ihr. Die Berührungspunkte der Tangentenebenen sind aber Punkte der Grenzfläche. Es liegt daher die Grenzfläche ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Ebene der Grenzfläche.

Um eine neue Eigenschaft der Grenzfläche zu entdecken, dient folgende Betrachtung. Es seien u, v, w, r die Coordinaten der Ebene der Grenzfläche und u_0, v_0, w_0, r_0 die Coordinaten irgend einer Tangentenebene der Grenzfläche. Alsdann sind $u+\lambda u_0$, $v+\lambda v_0$, $w+\lambda w_0$, $r+\lambda r_0$ die Coordinaten irgend einer Ebene, welche durch die gerade Linie geht, in der sich die erstgenannten Ebenen schneiden. Diese Coordinaten genügen der Gleichung (1):

$$(6) \ldots \quad F(u+\lambda u_0, \ v+\lambda v_0, \ w+\lambda w_0, \ r+\lambda r_0)=0.$$

Denn entwickelt man dieselben nach Potenzen von λ, so verschwindet das erste und letzte Glied, weil sowohl die Coordinaten der Ebene der Grenzfläche, als die Coordinaten der Tangentenebene, auf Grund von (3), der Gleichung (1) genügen. Es verschwindet aber auch das mit der ersten Potenz von λ multiplicirte Glied:

$$(7) \ldots \quad u_0 F'(u) + v_0 F'(v) + w_0 F'(w) + r_0 F'(r) = 0$$

auf Grund der Gleichungen (3).

Hiernach ist jede Ebene Tangentenebene der Grenzfläche, welche durch die gerade Linie geht, in der sich die Ebene der Grenzfläche und irgend eine Tangentenebene derselben schneiden. Umgekehrt wird man auch nach Analogie der correspondirenden Stelle in der vorhergehenden Vorlesung leicht beweisen können, dass, wenn jede Ebene, die, durch die Schnittlinie einer festen Ebene und einer beliebigen Tangentenebene einer Oberfläche zweiter Ordnung gelegt, wieder eine Tangentenebene derselben Oberfläche ist, die Oberfläche eine Grenzfläche sein muss.

Setzt man in der Gleichung (1) der Grenzfläche $r=0$, so erhält man:

$$(8) \ldots\ldots\ldots \quad F(u, v, w, 0) = 0,$$

die Gleichung des Tangentenkegels der Grenzfläche, dessen Spitze in dem Coordinatenanfangspunkte liegt.

Da dieser Kegel zweiter Ordnung die Grenzfläche ringsum einhüllt, die Grenzfläche selbst aber ihrer ganzen Ausdehnung nach in die Ebene der Grenzfläche fällt, so sieht man, dass die Grenzfläche von dem Kegelschnitt begrenzt wird, in welchem sich der bezeichnete Tangentenkegel und die Ebene der Grenzfläche schneiden.

Diesen, die Grenzfläche begrenzenden, Kegelschnitt kann man für die Grenzfläche selbst nehmen, wenn es sich um die Tangentenebenen der Grenzfläche handelt. Denn die Tangentenebenen des Kegelschnittes, das sind die Ebenen, welche durch die Tangente des Kegelschnittes gehen, sind Tangentenebenen der Grenzfläche, und umgekehrt geht jede Tangentenebene der Grenzfläche durch eine Tangente des Kegelschnittes.

Fassen wir diese Bemerkungen kurz zusammen, so können wir sagen:

Die Grenzfläche zweiter Ordnung fällt ihrer ganzen Ausdehnung nach in eine Ebene und wird in dieser Ebene von einem Kegelschnitt begrenzt.

Drückt man den Tangentenkegel (8) durch Punktcoordinaten aus, was nach der vorhergehenden Vorlesung ausführbar ist, weil die Spitze des Kegels im Coordinatenanfangspunkt liegt, so stellt sich die Grenzfläche dar als die Curve, in welcher dieser Kegel von der Ebene der Grenzfläche $ux + vy + wz + rp = 0$ geschnitten wird. Die Grenzfläche zweiter Ordnung wird hiernach in Punktcoordinaten durch zwei homogene Gleichungen dargestellt, von denen die eine vom zweiten, die andere vom ersten Grade ist.

Liegt der Coordinatenanfangspunkt zufälliger Weise in der Ebene der Grenzfläche (1), so kann man diese Betrachtungen nicht alle anstellen. In diesem Falle transformire man die Gleichung (1) der Grenzfläche mit Hilfe von (8) der dreizehnten Vorlesung auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt nicht in der Ebene der Grenzfläche liegt, und gehe, statt von (1), von der transformirten Gleichung der Grenzfläche aus.

Ein specieller Fall der Grenzfläche zweiter Ordnung ist der, wenn die Gleichung (1) in zwei lineare Factoren zer-

fällt, also die Oberfläche zweiter Ordnung ein Punktepaar darstellt. Denn in dieser Voraussetzung genügen die Coordinaten der Ebenen, welche durch die beiden Punkte gehen, den Gleichungen (3). Der die Grenzfläche begrenzende Kegelschnitt ist dann das von den beiden Punkten begrenzte Stück der durch sie gehenden geraden Linie, und die Ebene der Grenzfläche ist jede durch die beiden Punkte gelegte Ebene.

Es lässt sich aber auch jede Schnittfläche einer Ebene und einer beliebig gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche ausdrücken, wie die folgende Betrachtung lehren wird.

Wenn $F = 0$ und $\Phi = 0$ die Gleichungen von irgend zwei gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten sind, so weiss man, dass die Gleichung:

$$F + \lambda \Phi = 0$$

jede Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, welche von sämmtlichen, den beiden gegebenen Oberflächen gemeinsamen, Tangentenebenen berührt wird. Zerfällt Φ in das Product zweier linearer Ausdrücke V_0, V_1, so stellt die zweite gegebene Oberfläche ein Punktepaar dar $V_0 = 0$, $V_1 = 0$.

Diese Punkte fassen wir auf als die Pole zweier gegebenen Ebenen (u_0, v_0, w_0, r_0), (u_1, v_1, w_1, r_1) rücksichtlich der ersten gegebenen Oberfläche, indem wir setzen:

$$(9) \dots \quad \begin{aligned} V_0 &= uF'(u_0) + vF'(v_0) + wF'(w_0) + rF'(r_0), \\ V_1 &= uF'(u_1) + vF'(v_1) + wF'(w_1) + rF'(r_1). \end{aligned}$$

Alsdann hat man die allgemeinste Gleichung:

$$(10) \dots\dots\dots \quad F + \lambda V_0 V_1 = 0$$

der Oberflächen zweiter Ordnung, welche sämmtliche Tangentenebenen der gegebenen Oberfläche berühren, die durch den einen oder den anderen oder durch beide gegebene Punkte gehen. Es ist dieses also eine Oberfläche zweiter Ordnung, die jeden der beiden, von den gegebenen Punkten an die Oberfläche $F = 0$ gelegten, Tangentenkegel ringsum berührt.

Diese Oberfläche (10) wird vollständig bestimmt sein, wenn der Factor λ einen bestimmten Werth erhält. Bestimmt man daher diesen Factor λ so, dass die Oberfläche die Polarebene des Punktes $V_0 = 0$ berührt, indem man in der Glei-

chung (10) für die Variabeln setzt u_0, v_0, w_0, r_0, und setzt den Werth von λ in (10) ein, so erhält man die Gleichung:

$$(11)\quad 2F(u,v,w,r)\{u_0F'(u_1)+v_0F'(v_1)+w_0F'(w_1)+r_0F'(r_1)\} \\ -\{u\,F'(u_0)+v\,F'(v_0)+w\,F'(w_0)+r\,F'(r_0)\} \\ \times\{u\,F'(u_1)+v\,F'(v_1)+w\,F'(w_1)+r\,F'(r_1)\}=0$$

der ganz bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung, welche die beiden Tangentenkegel der Oberfläche $F=0$ ringsum berührt, und welche zugleich von der Polarebene des Punktes $V_0=0$ berührt wird.

Der Umstand, dass die Gleichung (11) ungeändert bleibt, wenn man die Indices 0 und 1 mit einander vertauscht, geometrisch gedeutet, giebt den zu dem drittletzten Satze der vorhergehenden Vorlesung reciproken Satz:

Jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche zwei Tangentenkegel einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung ringsum berührt, wird von den Polarebenen der Spitzen beider Kegel berührt, wenn eine von diesen Polarebenen die Oberfläche berührt.

Fallen die beiden Punkte $V_0=0$ und $V_1=0$ in einen zusammen, so erhält man aus (11) die Gleichung:

$$(12)\quad \ldots\ldots\ 4F(u,v,w,r)\,.\,F(u_0,v_0,w_0,r_0) \\ -\{uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)+rF'(r_0)\}^2=0$$

einer Oberfläche zweiter Ordnung, von welcher man weiss, dass sie die Polarebene des Punktes $V_0=0$ berührt, dass sie ferner den aus diesem Punkte an die Oberfläche $F=0$ gelegten Tangentenkegel ringsum berührt; aber dieses reicht nicht aus, die Oberfläche (12) vollständig zu definiren. Sie wird erst dadurch bestimmt, dass man nachweiset, dass sie überdies eine Grenzfläche zweiter Ordnung ist, und dass die Ebene derselben die Polarebene des Punktes $V_0=0$ ist. Dieser Nachweis wird darin gefunden, dass man sieht, wie die partiellen Differentialquotienten des linken Theiles der Gleichung (12), nach den Variabeln genommen, für die Werthe u_0, v_0, w_0, r_0 dieser Variabeln verschwinden. Denn dieses ist nach (3) das Criterium der Grenzfläche.

Hiernach ist die Polarebene des Punktes $V_0 = 0$, rücksichtlich der gegebenen Oberfläche $F = 0$, die Ebene der Grenzfläche (12), welche begrenzt wird durch den Tangentenkegel, der von dem Punkte $V_0 = 0$ als Spitze an die Oberfläche $F = 0$ gelegt ist, oder welche begrenzt wird durch den Kegelschnitt, in dem die Polarebene des Punktes $V_0 = 0$ die Oberfläche $F = 0$ schneidet.

Nimmt man diesen, die Grenzfläche (12) begrenzenden Kegelschnitt, für die Grenzfläche selbst, indem man nur die Tangentenebenen des Kegelschnittes ins Auge fasst, so kann man auch sagen, dass die Gleichung (12) den Kegelschnitt darstelle, in welchem die Polarebene des Punktes $V_0 = 0$ die Oberfläche $F = 0$ schneidet.

Es hat diese Vorlesung auf einen neuen analytischen Ausdruck eines, beliebig im Raume gegebenen, Kegelschnittes geführt. Wenn man nun erwägt, wie jeder andere analytische Ausdruck eines geometrischen Gebildes seine ihm eigenthümlichen Hülfsmittel zur Erforschung der Figur in sich trägt, so wird man nicht anstehen, der neuen Darstellung des Kegelschnittes im Raume durch eine einzige*) Gleichung gewisse Vortheile vorauszusagen. Worin diese bestehen, kann man nur dadurch erfahren, dass man, von der neuen Form der Gleichung des Kegelschnittes im Raume ausgehend, bekannte Sätze von den Kegelschnitten zu beweisen oder sonst

*) Gewöhnlich stellt man einen Kegelschnitt im Raume dar als die Schnittcurve einer Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ und einer Ebene $A = 0$. Die erste Gleichung führt 9 Constanten mit sich, die andere 3. Diese 12 Constanten lassen sich aber auf 8 zurückführen. Denn, multiplicirt man die zweite Gleichung mit einem linearen Factor, der 4 willkürliche Constanten mit sich führt, und addirt sie zu der Gleichung der Oberfläche, so erhält man an Stelle der Gleichung der Oberfläche eine neue Gleichung, in welcher durch die Willkürlichkeit der 4 eingeführten Constanten sich eine gleiche Zahl von Constanten vernichten lässt. Für die gegebene Oberfläche kann man auf diese Weise einen Kegel zweiter Ordnung substituiren, dessen Spitze im Coordinatenanfangspunkt liegt. Durch eine geringere Zahl von Constanten lässt sich analytisch ein Kegelschnitt im Raume nicht ausdrücken.

Die gleiche Zahl von Constanten hat aber auch die Kegelschnitt-Gleichung (1), da zwischen deren Coefficienten die Bedingungsgleichung (3) stattfindet.

bekannte Aufgaben zu lösen unternimmt. Der Vergleich der Auflösungen wird dann lehren, welche Principien und in welchen Fällen sie den Vorzug verdienen. Jedenfalls eröffnet sich hier eine reiche Quelle interessanter Aufgaben.

Sechszehnte Vorlesung.

Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen.

Durch die Schnittcurve zweier, durch ihre Gleichungen in homogenen Punktcoordinaten:

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{aligned} f &= a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots . = 0, \\ \varphi &= b_{00}x^2 + 2b_{01}xy + b_{11}y^2 + \ldots . = 0 \end{aligned}$$

gegebenen, Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung hindurchlegen, welche alle durch die eine Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ ausgedrückt werden:

$$(2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad f + \lambda\varphi = 0.$$

Da die Coefficienten in dieser Gleichung nach der vierzehnten Vorlesung nur eine Bedingungsgleichung zu erfüllen haben, wenn die Oberfläche (2) ein Kegel sein soll, so wird der willkürliche Factor λ sich immer so bestimmen lassen, dass der Bedingungsgleichung genügt wird. Es wird also immer ein Kegel zweiter Ordnung durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung gelegt werden können. Dieses trifft auch zu, wenn die zweite gegebene Oberfläche $\varphi = 0$ ein Ebenenpaar ist, in welchem Falle die Schnittcurve der beiden gegebenen Oberflächen in zwei ebene Curven der Oberfläche $f = 0$ zerfällt. Man wird darin einen neuen Beweis des Satzes erblicken, dass eine Oberfläche zweiter Ordnung durch jede Ebene in einem Kegelschnitte geschnitten wird, das heisst, in einer Curve, welche auf einem Kegel zweiter Ordnung liegt.

Um die Anzahl der Kegel zweiter Ordnung zu ermitteln, welche durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen (1) hindurchgehen, muss man die erwähnte Bedingungsgleichung selbst aufstellen. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, x, y, z, p seien die Coordinaten der Spitze des Kegels (2). Alsdann hat man nach (2) der vierzehnten Vorlesung:

$$(3) \ldots \quad \begin{aligned} f'(x) + \lambda \varphi'(x) &= 0, \\ f'(y) + \lambda \varphi'(y) &= 0, \\ f'(z) + \lambda \varphi'(z) &= 0, \\ f'(p) + \lambda \varphi'(p) &= 0, \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination der Coordinaten die gesuchte Bedingungsgleichung erhält:

$$(4) \ldots \Delta = \begin{vmatrix} a_{00} + \lambda b_{00}, & a_{01} + \lambda b_{01}, & \ldots & a_{03} + \lambda b_{03} \\ a_{10} + \lambda b_{10}, & a_{11} + \lambda b_{11}, & \ldots & a_{13} + \lambda b_{13} \\ a_{20} + \lambda b_{20}, & a_{21} + \lambda b_{21}, & \ldots & a_{23} + \lambda b_{23} \\ a_{30} + \lambda b_{30}, & a_{31} + \lambda b_{31}, & \ldots & a_{33} + \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist dieses eine in λ biquadratische Gleichung, und jeder Wurzel derselben entspricht ein Kegel. Daher hat man den Satz:

Durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich vier Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen.

Bezeichnet man mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die vier Wurzeln der Gleichung (4), mit 0, 1, 2, 3 die Spitzen der vier Kegel, und durch Beifügung der Indices 0, 1, 2, 3 an die Variabeln respective die Coordinaten der vier Kegelspitzen, so erhält man aus (3) die vier Systeme Gleichungen:

$$(5) \ldots \quad \begin{aligned} f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) &= 0, & f'(x_1) + \lambda_1 \varphi'(x_1) &= 0, \ldots, \\ f'(y_0) + \lambda_0 \varphi'(y_0) &= 0, & f'(y_1) + \lambda_1 \varphi'(y_1) &= 0, \ldots, \\ f'(z_0) + \lambda_0 \varphi'(z_0) &= 0, & f'(z_1) + \lambda_1 \varphi'(z_1) &= 0, \ldots, \\ f'(p_0) + \lambda_0 \varphi'(p_0) &= 0, & f'(p_1) + \lambda_1 \varphi'(p_1) &= 0, \ldots, \end{aligned}$$

aus welchen sich, wenn man die Wurzeln λ der biquadratischen Gleichung $\Delta = 0$ als bekannt voraussetzt, die Coordinaten der vier Kegelspitzen durch Auflösung von linearen Gleichungen ergeben.

Um aus diesen Gleichungen andere zur geometrischen Interpretation geeignete Gleichungen abzuleiten, multipliciren wir das erste System Gleichungen respective mit x_1, y_1, z_1, p_1 und componiren durch Addition derselben eine neue Gleichung. Ebenso multipliciren wir das zweite System Gleichungen respective mit x_0, y_0, z_0, p_0 und addiren. Die auf diese Weise erhaltene Gleichung ziehen wir von der ersteren ab und erhalten:

$$(\lambda_0 - \lambda_1)\,\{x_1\varphi'(x_0) + y_1\varphi'(y_0) + z_1\varphi'(z_0) + p_1\varphi'(p_0)\} = 0.$$

Da nun der erste Factor nicht verschwinden kann, weil λ_0 und λ_1 verschiedene Wurzeln der biquadratischen Gleichung $\varDelta = 0$ sind, so verschwindet der zweite Factor, und man hat:

$$x_1\varphi'(x_0) + y_1\varphi'(y_0) + z_1\varphi'(z_0) + p_1\varphi'(p_0) = 0.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung geht die vorher aus dem ersten System (5) componirte Gleichung über in:

$$x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0) = 0.$$

Da man aber in gleicher Weise mit je zwei Systemen Gleichungen (5) verfahren kann, so erhält man allgemein, wenn man mit m und n irgend zwei verschiedene Zahlen 0, 1, 2, 3 bezeichnet:

$$(6)\ \dots\ \begin{array}{l} x_m\varphi'(x_n) + y_m\varphi'(y_n) + z_m\varphi'(z_n) + p_m\varphi'(p_n) = 0, \\ x_m f'(x_n) + y_m f'(y_n) + z_m f'(z_n) + p_m f'(p_n) = 0, \end{array}$$

woraus endlich folgt:

$$x_m\{f'(x_n)+\lambda\varphi'(x_n)\} + y_m\{f'(y_n)+\lambda\varphi'(y_n)\} + z_m\{f'(z_n)+\lambda\varphi'(z_n)\} \\ + p_m\{f'(p_n)+\lambda\varphi'(p_n)\} = 0.$$

Diese Gleichung beweiset den Satz:

Durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich vier Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen. Die Spitzen je zweier von ihnen sind harmonische Pole jeder Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen hindurchgeht.

Eine wesentliche Bedingung für diesen Satz ist, dass sämmtliche Wurzeln der biquadratischen Gleichung $\varDelta = 0$

verschieden sind. Unter anderen Bedingungen treten auch andere Verhältnisse auf, wie zum Beispiel, wenn eine von den beiden Oberflächen ein Ebenenpaar wird oder wenn die beiden Oberflächen eine gerade Linie gemeinsam haben. Im ersten Falle hat die biquadratische Gleichung ein Paar gleiche Wurzeln, in dem anderen Falle zwei Paare. In dem ersten Falle zerfällt die Schnittcurve der beiden Oberflächen, welche von der vierten Ordnung genannt wird, weil sie von jeder Ebene in vier Punkten geschnitten wird, in zwei Kegelschnitte, im zweiten Falle in eine gerade Linie und in eine Raumcurve dritter Ordnung*). Wir gehen jedoch auf die Untersuchung dieser und anderer specieller Fälle hier nicht weiter ein**).

Vier Punkte im Raume, von denen jeder der harmonische Pol ist des anderen, in Rücksicht auf eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung, nennt man ein System harmonischer Pole der Oberfläche. Solcher Systeme harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung lassen sich eine unendliche Zahl bestimmen. Denn construirt man zu einem gegebenen Pol 0 einer Oberfläche zweiter Ordnung die Polarebene und nimmt auf dieser einen zweiten Punkt 1, auf der

---

*) Die Raumcurve dritter Ordnung ist nichts anderes, als ein in einem speciellen Falle abgetrennter Theil einer Raumcurve vierter Ordnung, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden. Wenn von den beiden Oberflächen in einem anderen Falle die eine ein Ebenenpaar wird, so besteht die Schnittcurve der beiden Oberflächen aus zwei Kegelschnitten, die auch von einander getrennt werden können. Es muss daher eine jede Eigenschaft der Schnittcurve vierter Ordnung zweier Oberflächen zweiter Ordnung ihren Ausdruck haben, sowohl in der Raumcurve dritter Ordnung, wie in dem Kegelschnitt. Das Bestreben, die den beiden letzgenannten Curvenarten gemeinsamen Eigenschaften zu entdecken, hat in den letzten fünfzig Jahren auf eine ausgedehnte Theorie der Raumcurven dritter Ordnung geführt. Wie zum Anschlusse an unser Lehrbuch findet man jene Theorie wiedergegeben in der Monographie „Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte von Drach," Leipzig, Teubner 1867. Separatabdruck aus Schloemilch's Zeitschrift für Mathematik, 12. Bd. Suppl. p. 73.

**) Eine Abhandlung von Lüroth in Schloemilch's Zeitschrift für Mathematik 13. Bd. p. 404, stellt sich die Aufgabe, sämmtliche Fälle gleicher Wurzeln der biquadratischen Gleichung $\Delta = 0$ geometrisch zu interpretiren.

Schnittlinie der Polarebenen von 0 und von 1 einen dritten Punkt 2 und bestimmt endlich auf der genannten Schnittlinie zum Punkte 2 den ihm zugeordneten Pol 3, so bilden die genannten vier Punkte ein System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche. Ein System harmonischer Pole einer Oberfläche zweiter Ordnung hat die charakteristische Eigenschaft, dass jede Ebene, welche durch drei von ihnen hindurchgeht, die Polarebene des vierten ist.

Was die vier Ebenen anbelangt, welche durch je drei aus einem System harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung gelegt werden können, so haben sie die Eigenschaft, dass jede derselben harmonische Polarebene der andern ist.

Vier Ebenen, von welchen je zwei harmonische Polarebenen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sind, bilden ein System harmonischer Polarebenen der gegebenen Oberfläche.

Auf Grund dieser Definitionen und der bekannten Eigenschaften von Pol und Polarebene hat man die Sätze:

Die vier Ebenen, welche durch je drei aus einem Systeme harmonischer Pole gelegt werden können, bilden ein System harmonischer Polarebenen.

Die vier Punkte, in welchen sich je drei Ebenen aus einem Systeme harmonischer Polarebenen schneiden, bilden ein System harmonischer Pole,

auf welche Sätze gestützt wir den vorhergehenden auch so ausdrücken können:

Die Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchlegen lassen, bilden ein System harmonischer Pole für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve gelegt werden kann, und zugleich die Ecken eines Tetraeders, dessen Seitenflächen ein System harmonischer Polarebenen eben derselben Oberfläche sind.

Wir haben in dem Vorhergehenden, von den 16 Gleichungen (5) ausgehend, durch eine geschickte Art der Elimination der vier Grössen $\lambda_0, \dots \lambda_3$ die 12 Gleichungen (6), die wir geometrisch deuten konnten, abgeleitet. Man kann aber auch umgekehrt, von den 12 Gleichungen (6) ausgehend, durch Einführung von vier neuen Grössen λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 die 16 Gleichungen (5) ableiten. Um zu dem ersten von diesen Systemen zu gelangen, setzen wir in (6) $n = 0$ und für m nach einander die Zahlen 1, 2, 3, wodurch wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
x_1\varphi'(x_0) + y_1\varphi'(y_0) + z_1\varphi'(z_0) + p_1\varphi'(p_0) &= 0,\\
x_2\varphi'(x_0) + y_2\varphi'(y_0) + z_2\varphi'(z_0) + p_2\varphi'(p_0) &= 0,\\
x_3\varphi'(x_0) + y_3\varphi'(y_0) + z_3\varphi'(z_0) + p_3\varphi'(p_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0) &= 0,\\
x_2 f'(x_0) + y_2 f'(y_0) + z_2 f'(z_0) + p_2 f'(p_0) &= 0,\\
x_3 f'(x_0) + y_3 f'(y_0) + z_3 f'(z_0) + p_3 f'(p_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Betrachtet man in dem ersten Systeme von drei Gleichungen die Grössen $\varphi'(x_0)$, $\varphi'(y_0)$, $\varphi'(z_0)$, $\varphi'(p_0)$ als die Unbekannten, in dem zweiten Systeme die Grössen $f'(x_0)$, $f'(y_0)$, $f'(z_0)$, $f'(p_0)$ als die Unbekannten, so sieht man, dass die beiden, die Verhältnisse der Unbekannten bestimmenden, Systeme Gleichungen sich nur durch die Ausdrucksweise der Unbekannten von einander unterscheiden. Das erste System Gleichungen muss daher durch Auflösung dasselbe Verhältniss der Unbekannten ergeben als das zweite. Das will sagen, dass sich ein Factor λ_0 finden lassen muss der Gestalt, dass:

$$f'(x_0) + \lambda_0\varphi'(x_0) = 0, \quad f'(y_0) + \lambda_0\varphi'(y_0) = 0, \dots$$

Da nun die Gleichungen (6) die Bedingungen ausdrücken für ein System harmonischer Pole der Oberfläche $f = 0$ und zugleich der Oberfläche $\varphi = 0$, so erkennt man in der Zurückführung der Gleichungen (6) auf (5) den Beweis des Satzes:

Wenn vier Punkte im Raume ein System harmonischer Pole bilden für eine Oberfläche zweiter Ordnung und für noch eine Oberfläche derselben Ordnung, so sind die vier Punkte die Spitzen der

vier Kegel zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen hindurchlegen lassen.

Es giebt nur ein System harmonischer Pole für zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung, weil durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen nur vier Kegel zweiter Ordnung gehen. Es giebt daher nur ein System harmonischer Polarebenen für zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung, gebildet aus den Seitenflächen des Poltetraeders, dessen Ecken das den beiden Oberflächen gemeinschaftliche System harmonischer Pole bilden.

Hiernach ist das Problem der Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen, äquivalent mit dem Problem des beiden Oberflächen gemeinsamen Systemes harmonischer Pole. Wir können daher in dem Folgenden das letztere für das ursprüngliche nehmen.

Aus den zur Lösung eines Problems aufgestellten Gleichungen soll man immer den möglichst grössten Nutzen ziehen, wenn gleich die Folgerungen aus den Gleichungen nichts mehr zur Lösung des Problems beitragen. Denn in der Regel sind die durch solche Nebenbetrachtungen gewonnenen Resultate für sich, aus dem Zusammenhange mit dem Hauptproblem gebracht, viel schwerer nachzuweisen.

Wir kehren deshalb zu dem Systeme Gleichungen (3) zurück, welches, unter der Voraussetzung, dass λ eine Wurzel der biquadratischen Gleichung $\varDelta = 0$, die Coordinaten der Spitze des durch die Schnittcurve der Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gelegten Kegels zweiter Ordnung bestimmt.

Eliminirt man aus je zwei Gleichungen dieses Systemes (3) die Grösse λ, so erhält man die Gleichungen von 6 Oberflächen zweiter Ordnung:

$$f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x) = 0, \quad f'(x)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(x) = 0, \ldots,$$

welche sämmtlich durch die vier Spitzen der durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gelegten Kegel zweiter Ordnung hindurchgehen. Es ist daher:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \chi = p_{01}[f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)]$$
$$+ p_{02}[f'(x)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(x)] + p_{03}[f'(x)\varphi'(p) - f'(p)\varphi'(x)]$$
$$+ p_{23}[f'(z)\varphi'(p) - f'(p)\varphi'(z)] + p_{13}[f'(y)\varphi'(p) - f'(p)\varphi'(y)]$$
$$+ p_{12}[f'(y)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(y)] = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die vier Kegelspitzen geht. Es ist dieses aber auch zugleich die allgemeinste Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die vier Kegelspitzen gehen, weil sie die Verhältnisse von 6 willkürlichen Constanten $p_{\varkappa\lambda}$ mit sich führt. Denn diese Constanten lassen sich noch so bestimmen, dass die Oberfläche (7) überdies durch 5 gegebene Punkte hindurchgeht, wodurch die Oberfläche erst vollständig bestimmt ist.

Wenn man die Gleichung (7) entwickelt, so nimmt sie die Gestalt an:

$$(8) \quad \ldots \quad \chi = \varepsilon_{00}x^2 + 2\,\varepsilon_{01}xy + \varepsilon_{11}y^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Die Coefficienten $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ in dieser Gleichung genügen vier linearen Bedingungsgleichungen, weil die Oberfläche $\chi = 0$ durch vier bestimmte Punkte, die vier Kegelspitzen, hindurchgeht. Von diesen vier Bedingungsgleichungen werden wir vorläufig nur eine entwickeln.

Zu diesem Zwecke erinnern wir an die Relationen (9) der zehnten Vorlesung zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes der Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ und den Coordinaten der Tangentenebene in diesem Punkte:

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = u, \quad \tfrac{1}{2}f'(y) = v, \quad \tfrac{1}{2}f'(z) = w, \quad \tfrac{1}{2}f'(p) = r.$$

Diese Relationen sind in grösserer Ausführlichkeit unter Berücksichtigung von (1):

$$\begin{aligned}
a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p &= u\,,\\
a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p &= v\,,\\
a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p &= w\,,\\
a_{30}x + a_{31}y + a_{32}z + a_{33}p &= r.
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Systemes Gleichungen giebt nach (12) der zehnten Vorlesung Gleichungen von der Form:

$$\tfrac{1}{2}F'(u) = x, \quad \tfrac{1}{2}F'(v) = y, \quad \tfrac{1}{2}F'(w) = z, \quad \tfrac{1}{2}F'(r) = p,$$

welche, durch Multiplication befreit von dem gemeinsamen Nenner A, sich also gestalten:

$$\begin{aligned}
A_{00}u + A_{10}v + A_{20}w + A_{30}r &= Ax, \\
A_{01}u + A_{11}v + A_{21}w + A_{31}r &= Ay, \\
A_{02}u + A_{12}v + A_{22}w + A_{32}r &= Az, \\
A_{03}u + A_{13}v + A_{23}w + A_{33}r &= Ap,
\end{aligned}$$

indem $A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa}$, weil $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, und $F = 0$ oder $A \,.\, F = 0$ die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist.

Zwischen den Coefficienten des ersten Systemes linearer Gleichungen und den Coefficienten ihrer Auflösungen hat man bekanntlich die Relationen:

$$\begin{aligned}
A &= a_{\varkappa 0}A_{\varkappa 0} + a_{\varkappa 1}A_{\varkappa 1} + a_{\varkappa 2}A_{\varkappa 2} + a_{\varkappa 3}A_{\varkappa 3} \\
0 &= a_{\varkappa 0}A_{\lambda 0} + a_{\varkappa 1}A_{\lambda 1} + a_{\varkappa 2}A_{\lambda 2} + a_{\varkappa 3}A_{\lambda 3}.
\end{aligned}$$

Wir drücken diese Relationen zweckmässig in Worten also aus:

„Wenn man in der Entwickelung der 16 Ausdrücke:

$$\begin{matrix}
\tfrac{1}{2}xf'(x), & \tfrac{1}{2}yf'(x), & \tfrac{1}{2}zf'(x), & \tfrac{1}{2}pf'(x), \\
\tfrac{1}{2}xf'(y), & \tfrac{1}{2}yf'(y), & \tfrac{1}{2}zf'(y), & \tfrac{1}{2}pf'(y), \\
\tfrac{1}{2}xf'(z), & \tfrac{1}{2}yf'(z), & \tfrac{1}{2}zf'(z), & \tfrac{1}{2}pf'(z), \\
\tfrac{1}{2}xf'(p), & \tfrac{1}{2}yf'(p), & \tfrac{1}{2}zf'(p), & \tfrac{1}{2}pf'(p),
\end{matrix}$$

„für die Producte:

$$xx, \quad xy, \quad yy, \; \ldots\ldots$$

„respective setzt:

$$A_{00}, \quad A_{01}, \quad A_{11}, \; \ldots\ldots,$$

„so gehen dieselben über in:

$$\begin{matrix}
A, & 0, & 0, & 0, \\
0, & A, & 0, & 0, \\
0, & 0, & A, & 0, \\
0, & 0, & 0, & A.
\end{matrix}$$

Daraus folgt, dass das erste mit p_{01} multiplicirte Glied:

$$f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)$$

in der Gleichung (7) durch die gleiche Veränderung verschwindet. Denn dieses mit dem Factor $\frac{1}{4}$ multiplicirte Glied lässt sich ja so darstellen:

$$b_{01}\tfrac{1}{2}xf'(x) + b_{11}\tfrac{1}{2}yf'(x) + b_{21}\tfrac{1}{2}zf'(x) + b_{31}\tfrac{1}{2}pf'(x)$$
$$- b_{00}\tfrac{1}{2}xf'(y) - b_{01}\tfrac{1}{2}yf'(y) - b_{02}\tfrac{1}{2}zf'(y) - b_{03}\tfrac{1}{2}pf'(y).$$

Aber es verschwindet durch diese Veränderung nicht bloss das erste Glied der Gleichung (7), sondern auch jedes der übrigen 5 Glieder. Es verschwindet daher auch die ganze Function χ durch die genannte Veränderung. Nimmt man nun statt der Function χ aus (7) ihre Entwickelung (8), so ergiebt sich daraus die eine von den linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$:

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \varepsilon_{00}A_{00} + 2\varepsilon_{01}A_{01} + \varepsilon_{11}A_{11} + \ldots\ldots = 0,$$

welcher alle Oberflächen zweiter Ordnung $\chi = 0$ zu genügen haben, welche durch das den beiden Oberflächen zweiter Ordnung $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinschaftliche System harmonischer Pole hindurchgehen.

Bemerkt man nun, dass in die Gleichung (9), da die Grössen $A_{\varkappa\lambda}$ Functionen sind allein von den Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$, die Coefficienten $b_{\varkappa\lambda}$ gar nicht eingehen, so sieht man, dass jede beliebige der Oberflächen zweiter Ordnung $\varphi = 0$ auf die Bedingungsgleichung (9) keinen Einfluss ausübt. Die vier Punkte, durch welche die Oberfläche $\chi = 0$ hindurchgeht, bilden daher unter der Bedingung (9) nur ein System harmonischer Pole der Oberfläche $f = 0$. Diese Bemerkung drücken wir als Satz aus wie folgt:

Wenn:

$$\varepsilon_{00}x^2 + 2\varepsilon_{01}xy + \varepsilon_{11}y^2 + \ldots = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung ist in homogenen Punktcoordinaten und:

$$A_{00}u^2 + 2A_{01}uv + A_{11}v^2 + \ldots = 0$$

die Gleichung einer zweiten Oberfläche zweiter Ordnung in homogenen Ebenencoordinaten, so ist:

$$\varepsilon_{00}A_{00} + 2\varepsilon_{01}A_{01} + \varepsilon_{11}A_{11} + \ldots = 0$$

die Bedingungsgleichung, dass die erste Oberfläche

durch irgend ein System harmonischer Pole der zweiten Oberfläche hindurchgehe.

Da wir in dem Folgenden von diesem Satze vielfältige Anwendungen zu machen haben werden, so fassen wir denselben als eine Regel auf, der wir folgenden Ausdruck geben.

Wenn

$$\varepsilon_{00}x^2 + 2\varepsilon_{01}xy + \varepsilon_{11}y^2 + \ldots = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten ist und:

$$A_{00}u^2 + 2A_{01}uv + A_{11}v^2 + \ldots = 0$$

die Gleichung einer zweiten Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten, so erhält man die Bedingungsgleichung, dass die erste Oberfläche durch irgend ein System harmonischer Pole der zweiten Oberfläche hindurchgehe, entweder, wenn man in der Punktcoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$xx,\quad xy,\quad yy,\ldots$$

respective die Coefficienten aus der Ebenencoordinatengleichung setzt:

$$A_{00},\quad A_{01},\quad A_{11},\ldots$$

oder, wenn man in der Ebenencoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$uu,\quad uv,\quad vv,\ldots.$$

respective die Coefficienten aus der Punktcoordinatengleichung setzt:

$$\varepsilon_{00},\quad \varepsilon_{01},\quad \varepsilon_{11},\ldots.$$

Der genannte Satz giebt die geometrische Bedeutung einer ganz allgemeinen linearen Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der, durch ihre Gleichung in Punktcoordinaten gegebenen, Oberfläche zweiter Ordnung $\chi = 0$. Durch ihn wird die analoge Frage für die Oberflächen zweiter Ordnung beantwortet, welche wir im Anfange der fünften Vorlesung für die Ebenen aufgeworfen und beantwortet haben. Die

Bedingungsgleichung, dass eine Oberfläche zweiter Ordnung durch einen gegebenen Punkt gehe, ist zwar auch eine lineare Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche, aber diese Bedingungsgleichung hat einen ganz speciellen Charakter. Denn sie enthält nicht 10 Constanten, sondern nur die 4 Coordinaten des gegebenen Punktes als Constanten.

Sind zwei Oberflächen zweiter Ordnung durch ihre Punktcoordinatengleichungen $\chi = 0$ und $f = 0$ gegeben und man verlangt die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in diesen Gleichungen, welche erfüllt werden muss, wenn die erste Oberfläche $\chi = 0$ durch irgend ein System harmonischer Pole der anderen Oberfläche $f = 0$ hindurchgehen soll, so hat man die Oberfläche $f = 0$ durch Ebenencoordinaten auszudrücken. Dieser Ausdruck ist nach (16) der zehnten Vorlesung, in der Voraussetzung, dass $f = 0$ die erste Gleichung (1) ist, folgender:

$$\begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & w \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & r \\ u, & v, & w, & r, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In dieser durch Ebenencoordinaten ausgedrückten Gleichung der Oberfläche $f = 0$ hat man für:

$$uu, \quad uv, \quad vv, \; \ldots \; .$$

respective zu setzen die Coefficienten aus der Gleichung $\chi = 0$:

$$\varepsilon_{00}, \quad \varepsilon_{01}, \quad \varepsilon_{11}, \; \ldots,$$

um die gesuchte Bedingungsgleichung (9) zu erhalten.

Wir haben diese an sich einfachen Operationen zur Bildung der Gleichung (9) deshalb so weitläufig auseinander gesetzt, weil dieselben sich in dem Folgenden mehrmals wiederholen werden in etwas complicirten Ausdrücken.

Von den vier linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung $\chi = 0$, welche diese Coefficienten zu erfüllen haben, wenn die Oberfläche durch das den beiden Oberflächen zweiter

Ordnung $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen soll, haben wir bisher nur eine, die Gleichung (9), hervorgehoben. Wir werden jetzt alle vier Bedingungsgleichungen aufstellen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die Gleichung:

$$(10) \quad \varkappa f + \lambda \varphi = 0$$

mit ganz willkürlich gewählten Werthen von $\varkappa$ und λ eine Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, für welche das den beiden Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole ebenfalls ein System harmonischer Pole ist. Die Oberfläche (8), $\chi = 0$, welche durch das den genannten beiden Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole geht, geht also auch durch ein System harmonischer Pole der Oberfläche (10). Die Bedingung, dass das Letztere zutreffe, erhalten wir nach der vorhin angegebenen Regel auf folgende Art. Wir drücken die Oberfläche (10) in Ebenencoordinaten aus wie folgt:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \varkappa a_{00} + \lambda b_{00}, & \varkappa a_{01} + \lambda b_{01}, & \dots & \varkappa a_{03} + \lambda b_{03}, & u \\ \varkappa a_{10} + \lambda b_{10}, & \varkappa a_{11} + \lambda b_{11}, & \dots & \varkappa a_{13} + \lambda b_{13}, & v \\ \varkappa a_{20} + \lambda b_{20}, & \varkappa a_{21} + \lambda b_{21}, & \dots & \varkappa a_{23} + \lambda b_{23}, & w \\ \varkappa a_{30} + \lambda b_{30}, & \varkappa a_{31} + \lambda b_{31}, & \dots & \varkappa a_{33} + \lambda b_{33}, & r \\ u, & v, & \dots & r, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir entwickeln den linken Theil dieser Gleichung der Oberfläche (10) in Ebenencoordinaten nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r, indem wir setzen:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \varkappa a_{00} + \lambda b_{00}, & \varkappa a_{01} + \lambda b_{01}, & \dots & \varkappa a_{03} + \lambda b_{03}, & u \\ \varkappa a_{10} + \lambda b_{10}, & \varkappa a_{11} + \lambda b_{11}, & \dots & \varkappa a_{13} + \lambda b_{13}, & v \\ \varkappa a_{20} + \lambda b_{20}, & \varkappa a_{21} + \lambda b_{21}, & \dots & \varkappa a_{23} + \lambda b_{23}, & w \\ \varkappa a_{30} + \lambda b_{30}, & \varkappa a_{31} + \varkappa b_{31}, & \dots & \varkappa a_{33} + \lambda b_{33}, & r \\ u, & v, & \dots & r & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= C'_{00} u^2 + 2 C'_{01} uv + C'_{11} v^2 + \dots .$$

Setzen wir hierauf diese Entwickelung gleich 0, indem wir nach der angegebenen Regel die Potenzen und Producte der Variabeln u^2, uv, v^2 ... respective verändern in ε_{00}, ε_{01}, ε_{11} ..., so erhalten wir:

(13) . . . . . $\varepsilon_{00} C'_{00} + 2\varepsilon_{01} C'_{01} + \varepsilon_{11} C'_{11} + \ldots\ldots = 0,$

die Bedingung, dass die Oberfläche (8) $\chi = 0$ durch ein System harmonischer Pole der Oberfläche (10) gehe.

In dem weitern Verlauf unserer begonnenen Untersuchung werden wir vielfältig auf Gleichungen von der Form (13) geführt werden. Wir wählen daher, weil $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}$ und $C'_{mn} = C'_{nm}$ ist, die folgende kürzere Darstellungsweise dieser Gleichung:

(14) . . . . $\Sigma \varepsilon_{mn} C'_{mn} = 0.$

Die Gleichung (11) ist eine homogene in Rücksicht auf $\varkappa$ und λ und vom dritten Grade. In der Entwickelung (12) wird daher auch jeder Coefficient C'_{mn} homogen vom dritten Grade sein, von der Form:

(15) . . . $C'_{mn} = \varkappa^3 C^{000}_{mn} + \varkappa^2 \lambda C^{001}_{mn} + \varkappa \lambda^2 C^{011}_{mn} + \lambda^3 C^{111}_{mn}.$

Denkt man sich diese Ausdrücke in die Gleichung (14) gesetzt und beachtet, dass diese Gleichung für alle Werthe von $\varkappa$ und λ erfüllt werden muss, so zerspaltet sich dieselbe in folgende vier Gleichungen:

(16) . . . . $$\Sigma \varepsilon_{mn} C^{000}_{mn} = 0, \quad \Sigma \varepsilon_{mn} C^{001}_{mn} = 0,$$ $$\Sigma \varepsilon_{mn} C^{011}_{mn} = 0, \quad \Sigma \varepsilon_{mn} C^{111}_{mn} = 0.$$

Dieses sind die vier gesuchten linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche $\chi = 0$, welche erfüllt werden müssen, wenn die Oberfläche durch das den beiden Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen soll.

Ein diesem System von vier Gleichungen äquivalentes System linearer Gleichungen würde man erhalten, wenn man die Bedingungen aufstellte, dass die Oberfläche (8), $\chi = 0$, durch jede einzelne Spitze der vier Kegel gehe, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ legen lassen. Aber die Coordinaten dieser vier Kegelspitzen, die in die Bedingungsgleichungen eingehen, involviren noch, wie man gesehen hat, die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $\Delta = 0$, deren Kenntniss zur Aufstellung der Gleichungen (16) nicht nothwendig ist.

Wir werden jetzt die vier Bedingungsgleichungen aufstellen, welche die Coefficienten in der Gleichung der Ober-

fläche (8), $\chi = 0$, zu erfüllen haben, wenn dieselbe durch das der ersten Oberfläche (1), $f = 0$, und einer dritten Oberfläche zweiter Ordnung $\psi = 0$:

$$(17) \ldots \quad \psi = c_{00}x^2 + 2c_{01}xy + c_{11}y^2 + \ldots\ldots = 0$$

gemeinsame System harmonischer Pole gehen soll.

Zu diesem Zwecke bilden wir die analoge Gleichung (11), indem wir in jener Gleichung für die Buchstaben b und λ die Buchstaben c und μ setzen, und entwickeln den linken Theil der so gebildeten Gleichung nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r wie folgt:

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \varkappa a_{00} + \mu c_{00}, & \varkappa a_{01} + \mu c_{01}, & \ldots & \varkappa a_{03} + \mu c_{03}, & u \\ \varkappa a_{10} + \mu c_{10}, & \varkappa a_{11} + \mu c_{11}, & \ldots & \varkappa a_{13} + \mu c_{13}, & v \\ \varkappa a_{20} + \mu c_{20}, & \varkappa a_{21} + \mu c_{21}, & \ldots & \varkappa a_{23} + \mu c_{23}, & w \\ \varkappa a_{30} + \mu c_{30}, & \varkappa a_{31} + \mu c_{31}, & \ldots & \varkappa a_{33} + \mu c_{33}, & r \\ u, & v, & \ldots & r, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= B'_{00}u^2 + 2B'_{01}uv + B'_{11}v^2 + \ldots$$

Die der Gleichung (14) nachgebildete Gleichung, woraus sich schliesslich die vier Gleichungen (16) ergaben, ist hiernach folgende:

$$(19) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma \varepsilon_{mn} B'_{mn} = 0.$$

Beachten wir wieder, dass die Coefficienten B'_{mn} in der Entwickelung (18) von der Form sind:

$$(20) \quad B'_{mn} = \varkappa^3 B_{mn}^{000} + \varkappa^2 \mu B_{mn}^{002} + \varkappa \mu^2 B_{mn}^{022} + \mu^3 B_{mn}^{222},$$

so ergeben sich aus der Gleichung (19) die verlangten vier Bedingungsgleichungen:

$$(21) \ldots \quad \begin{array}{ll} \Sigma \varepsilon_{mn} B_{mn}^{000} = 0, & \Sigma \varepsilon_{mn} B_{mn}^{002} = 0, \\ \Sigma \varepsilon_{mn} B_{mn}^{022} = 0, & \Sigma \varepsilon_{mn} B_{mn}^{222} = 0. \end{array}$$

Soll hiernach die Oberfläche (8), $\chi = 0$, durch das den Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen, also durch vier bestimmte Punkte, so müssen die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche $\chi = 0$ den vier linearen Bedingungsgleichungen (16) genügen. Soll die Oberfläche (8), $\chi = 0$, durch das den Oberflächen $f = 0$ und $\psi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen, also

wieder durch vier bestimmte Punkte, so müssen die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche $\chi = 0$ den vier linearen Bedingungsgleichungen (21) genügen. Soll endlich die Oberfläche (8), $\chi = 0$, durch beide Systeme harmonischer Pole der Oberfläche $f = 0$, also durch 8 bestimmte Punkte gehen, so haben die Coefficienten in der Gleichung (8), $\chi = 0$, den 8 Gleichungen (16) und (21) zu gleicher Zeit zu genügen.

Man wird in dem Umstande, dass die Coefficienten in der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch 8 gegebene Punkte geht, auch 8 linearen Bedingungsgleichungen genügen, nichts Ungewöhnliches erblicken. Um so mehr muss es überraschen, wenn man sieht, wie in unserem Falle die 8 Bedingungsgleichungen (16) und (21) sich auf nur 7 Bedingungsgleichungen reduciren, indem die erste Gleichung (16) mit der ersten Gleichung (21) zusammenfällt.

Denn setzt man $\varkappa = 1$ und $\lambda = \mu = 0$, so wird aus (15) und (20):

$$C_{mn} = C^{000}_{mn}, \quad B'_{mn} = B^{000}_{mn},$$

während (12) und (18) die Entwickelung eines und desselben Ausdruckes nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r darstellen, nämlich:

$$C^{000}_{00} u^2 + 2 C^{000}_{01} uv + C^{000}_{11} v^2 + \ldots \qquad \text{und:}$$
$$B^{000}_{00} u^2 + 2 B^{000}_{01} uv + B^{000}_{11} v^2 + \ldots$$

Da aber diese Entwickelungen Glied für Glied übereinstimmen müssen, so hat man:

$$(22) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad B^{000}_{mn} = C^{000}_{mn},$$

wodurch eben der Beweis geführt ist, dass die erste Gleichung (16) und die erste Gleichung (21) eine und dieselbe Gleichung sind.

Es tritt uns hier nun das Paradoxon entgegen, dass die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (8), $\chi = 0$, nur 7 linearen Bedingungsgleichungen (16) und (21) zu genügen brauchen, damit die Oberfläche durch 8 bestimmte Punkte gehe, nämlich durch das den Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole und zugleich durch das den Oberflächen $f = 0$ und $\psi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole.

Dieses Paradoxon findet seine Erklärung in dem in der neunten Vorlesung aufgestellten Satze, „dass alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Punkte gehen, auch durch einen durch diese 7 Punkte bestimmten achten Punkt gehen.“ Denn wenn die 8 Punkte, durch welche eine Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgehen soll, im Raume so gewählt sind, dass sich in ihnen drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, welche nicht durch dieselbe Schnittcurve gehen, so reduciren sich die 8 Bedingungsgleichungen auf 7. Dieses ist aber gerade unser Fall. Denn es gehen alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 Punkte aus den beiden Systemen harmonischer Pole gehen, auch durch den achten Punkt.

Die beiden Systeme harmonischer Pole werden, wenn man die Oberfläche $f=0$ als gegeben betrachtet, die Oberflächen $\varphi=0$ und $\psi=0$ aber als veränderlich, irgend zwei Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche $f=0$ sein. Von ihnen gilt dasselbe, was wir von den beiden gemeinsamen Systemen harmonischer Pole auseinander gesetzt haben. Wir können daher die vorausgegangenen Bemerkungen in doppelter Ausdrucksweise also wiedergeben:

Irgend zwei Systeme harmonischer Pole einer Oberfläche zweiter Ordnung bilden ein System von 8 Punkten, in welchen sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, welche nicht durch dieselbe Schnittcurve gehen.

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 Punkte aus zwei Systemen harmonischer Pole einer Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgehen, gehen auch durch den achten Punkt.

Um auch die Umkehrung dieser Sätze zu rechtfertigen, stellen wir folgende Betrachtungen an:

Wir bezeichnen mit 0, 1, 2, . . . 7 irgend 8 Punkte im Raume und durch Beifügung dieser 8 Zahlen als Indices der homogenen Coordinaten die Coordinaten der 8 Punkte. Wir vertheilen die 8 Punkte in zwei Systeme von vier 4 Punkten 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7 und stellen, indem wir unter μ

und ν irgend zwei verschiedene von den Zahlen 4, 5, 6, 7 verstehen, die 6 Bedingungen auf, welche zu erfüllen sind, wenn für eine Oberfläche zweiter Ordnung $f=0$ das zweite System von 4 Punkten ein System harmonischer Pole sein soll:

$$(23) \ldots \quad x_\mu f'(x_\nu) + y_\mu f'(y_\nu) + z_\mu f'(z_\nu) + p_\mu f'(p_\nu) = 0.$$

Wir drücken ferner die 6 Bedingungen aus, welche die Coefficienten in der Gleichung derselben Oberfläche $f=0$ zu erfüllen haben, wenn auch das erste System von 4 Punkten ein System harmonischer Pole sein soll:

$$(24) \ldots \quad \begin{aligned} x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) + p_1 f'(p_2) &= 0, \\ x_1 f'(x_3) + y_1 f'(y_3) + z_1 f'(z_3) + p_1 f'(p_3) &= 0, \\ x_2 f'(x_3) + y_2 f'(y_3) + z_2 f'(z_3) + p_2 f'(p_3) &= 0, \end{aligned}$$

$$(25) \ldots \quad \begin{aligned} x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1) + p_0 f'(p_1) &= 0, \\ x_0 f'(x_2) + y_0 f'(y_2) + z_0 f'(z_2) + p_0 f'(p_2) &= 0, \\ x_0 f'(x_3) + y_0 f'(y_3) + z_0 f'(z_3) + p_0 f'(p_3) &= 0. \end{aligned}$$

Wenn die 8 Punkte im Raume beliebig gegeben sind, so sieht man wohl, dass die 10, in die aufgestellten 12 Gleichungen (23), (24), (25) linear und homogen eingehenden, Coefficienten aus der Gleichung der Oberfläche $f=0$ sich nicht so bestimmen lassen, dass allen diesen Gleichungen zugleich genügt wird. Dagegen lassen sich die Verhältnisse der genannten Coefficienten unzweideutig so bestimmen, dass den 6 Gleichungen (23) und zugleich den 3 Gleichungen (24) genügt wird, welches auch die 7 Punkte 1, 2, ... 7 seien. Auf diese Weise ist die Oberfläche $f=0$ durch die 7 Punkte unzweideutig bestimmt. Bestimmt man hierauf den Punkt 0 als den Pol der durch 1, 2, 3 gelegten Ebene, nämlich so, dass seine Coordinaten den 3 in Rücksicht auf sie linearen Gleichungen (25) genügen, so hat man 2 Systeme harmonischer Pole der unzweideutig bestimmten Oberfläche $f=0$, von welchen die letzt genannten Sätze gelten. Dieser Punkt 0 ist demnach der achte Schnittpunkt von 3 Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die 7 beliebig gegebenen Punkte 1, 2, ... 7 hindurchgehen, sich aber nicht in derselben Curve schneiden. Wir geben diese Bemerkungen in der Kürze also wieder:

Die 8 Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung, welche ausser den 8 Punkten weiter

keinen Punkt gemein haben, bilden, in 2 Gruppen von 4 Punkten vertheilt, 2 Systeme harmonischer Pole einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung.

Da die Art der Vertheilung der 8 Schnittpunkte der 3 Oberflächen zweiter Ordnung willkürlich bleibt, so entspricht jeder anderen Vertheilungsart auch eine andere Oberfläche zweiter Ordnung.

Eine unmittelbare Folge aus dem vorletzten Satze ist der Satz:

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung durch ein System harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung geht, so geht dieselbe Oberfläche durch unendlich viele Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche.

Denn nimmt man auf der Oberfläche, welche durch ein System harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche geht, einen Punkt 0 beliebig an, construirt die Polarebene dieses Punktes rücksichtlich der gegebenen Oberfläche, nimmt hierauf auf der Schnittcurve der Polarebene und der ersten Oberfläche einen zweiten Punkt 1 und construirt wieder die Polarebene rücksichtlich der gegebenen Oberfläche, so schneiden die beiden Polarebenen und die erste Oberfläche sich in zwei Punkten 2 und 3. Die Punkte 0, 1, 2 bilden dann ein unvollständiges System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche. Da aber die erste Oberfläche der Annahme nach durch ein vollständiges System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche geht, und da dieselbe Oberfläche auch durch das genannte unvollständige System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche geht, so geht sie auch durch den noch übrigen Pol.

Von besonderem analytischen Interesse ist die lineare Bestimmung der Coordinaten des achten Schnittpunktes 0 von drei Oberflächen zweiter Ordnung durch die Coordinaten der übrigen Schnittpunkte 1, 2, . . . 7. Denn setzt man die durch die Gleichungen (23) und (24) gegebenen Verhältnisse der Coefficienten aus der Gleichung der Oberfläche $f = 0$ in die 3 Gleichungen (25), so enthalten diese, in Rücksicht auf die

Coordinaten des achten Schnittpunktes 0 linearen Gleichungen, nichts, als die Coordinaten der 8 Schnittpunkte.

Schliesslich entwickeln wir die 4 Bedingungsgleichungen, welchen die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (8), $\chi = 0$, zu genügen haben, wenn diese Oberfläche durch das der zweiten Oberfläche (1), $\varphi = 0$, und der Oberfläche (17), $\psi = 0$, gemeinsame System harmonischer Pole gehen soll.

Wir bilden zu diesem Zwecke die analoge Gleichung (11), indem wir in jener Gleichung für die Buchstaben a und $\varkappa$ die Buchstaben c und μ setzen, und entwickeln den linken Theil der so veränderten Gleichung nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r wie folgt:

$$(26) \ldots \quad \begin{vmatrix} \lambda b_{00} + \mu c_{00}, & \lambda b_{01} + \mu c_{01}, & \ldots & \lambda b_{03} + \mu c_{03}, & u \\ \lambda b_{10} + \mu c_{10}, & \lambda b_{11} + \mu c_{11}, & \ldots & \lambda b_{13} + \mu c_{13}, & v \\ \lambda b_{20} + \mu c_{20}, & \lambda b_{21} + \mu c_{21}, & \ldots & \lambda b_{23} + \mu c_{23}, & w \\ \lambda b_{30} + \mu c_{30}, & \lambda b_{31} + \mu c_{31}, & \ldots & \lambda b_{33} + \mu c_{33}, & r \\ u, & v, & \ldots & r, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= A'_{00} u^2 + 2 A'_{01} uv + A'_{11} v^2 + \ldots .$$

Alsdann hat man für beliebige Werthe von λ und μ die der Gleichung (14) entsprechende Bedingungsgleichung:

$$(27) \ldots \ldots \ldots \quad \Sigma \varepsilon_{mn} A'_{mn} = 0.$$

Da aber nach der Entwickelung (26) die Ausdrücke A'_{mn} von der Form sind:

$$(28) \ldots \quad A'_{mn} = \lambda^3 A^{111}_{mn} + \lambda^2 \mu A^{112}_{mn} + \lambda \mu^2 A^{122}_{mn} + \mu^3 A^{222}_{mn},$$

so zerfällt die Gleichung (27) in die folgenden gesuchten Bedingungsgleichungen:

$$(29) \ldots \quad \begin{aligned} &\Sigma \varepsilon_{mn} A^{111}_{mn} = 0, \qquad \Sigma \varepsilon_{mn} A^{112}_{mn} = 0, \\ &\Sigma \varepsilon_{mn} A^{122}_{mn} = 0, \qquad \Sigma \varepsilon_{mn} A^{222}_{mn} = 0. \end{aligned}$$

Unter diesen 4 Bedingungsgleichungen befinden sich zwei, welche wir bereits entwickelt haben. Denn setzt man $\lambda = 1$, $\varkappa = \mu = 0$, so wird nach (28) und (15) $A'_{mn} = A^{111}_{mn}$ und $C'_{mn} = C^{111}_{mn}$, und da unter diesen Umständen (26) und (12) die Entwickelungen desselben Ausdruckes darstellen, so hat man:

$$(30) \ldots \ldots \ldots \quad C^{111}_{mn} = A^{111}_{mn}.$$

Ebenso findet man, wenn man die Entwickelungen von (26) und (18) vergleicht in der Voraussetzung, dass $\mu = 1$, $\varkappa = \lambda = 0$, dass:

$$(31) \quad \dots\dots\dots\dots \quad A_{mn}^{222} = B_{mn}^{222}.$$

Hiernach fällt die erste Gleichung (29) mit der letzten Gleichung (16) zusammen und die letzte Gleichung (29) mit der letzten Gleichung (21), gleich wie die erste Gleichung (16) und die erste Gleichung (21) zusammenfielen.

Die 12 linearen Bedingungsgleichungen, welche die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung (8), $\chi = 0$, zu erfüllen haben, wenn diese Oberfläche durch die drei betrachteten Systeme harmonischer Pole gehen soll, reduciren sich also auf 9 Bedingungen, welchen unter allen Umständen genügt werden kann; was wir als geometrischen Satz also ausdrücken:

Durch die Spitzen der 12 Kegel zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve je zweier von drei Oberflächen zweiter Ordnung legen lassen, geht eine unzweideutig bestimmte Oberfläche zweiter Ordnung hindurch.

Wir legen auf diesen Satz besonders deshalb ein Gewicht, weil er lehrt, aus den Coefficienten in den Gleichungen von irgend drei Oberflächen zweiter Ordnung in symmetrischer Weise die Coefficienten in der Gleichung einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung zu bilden, die eine leicht ausdrückbare geometrische Beziehung hat zu den gegebenen 3 Oberflächen zweiter Ordnung.

Es bedarf nicht der drei auseinandergesetzten Operationen, um die 9 linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (8), $\chi = 0$, herzuleiten, wenn diese Oberfläche durch die genannten 12 Kegelspitzen gehen soll. Man kann diese drei Operationen in eine vereinigen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die drei Ausdrücke (12), (18), (26) sich durch folgenden, allgemeineren, darstellen lassen:

$$(32)\ldots\quad \begin{vmatrix} \varkappa a_{00}+\lambda b_{00}+\mu c_{00}, & \ldots & \varkappa a_{03}+\lambda b_{03}+\mu c_{03}, & u \\ \varkappa a_{10}+\lambda b_{10}+\mu c_{10}, & \ldots & \varkappa a_{13}+\lambda b_{13}+\mu c_{13}, & v \\ \varkappa a_{20}+\lambda b_{20}+\mu c_{20}, & \ldots & \varkappa a_{23}+\lambda b_{23}+\mu c_{23}, & w \\ \varkappa a_{30}+\lambda b_{30}+\mu c_{30}, & \ldots & \varkappa a_{33}+\lambda b_{33}+\mu c_{33}, & r \\ u, & \ldots & r, & o \end{vmatrix},$$

wenn man annimmt, dass eine von den drei Variabeln $\varkappa$, λ, μ, gleichviel welche, gleich 0 ist. Unter dieser Annahme erhalten wir nun die gesuchten Bedingungsgleichungen, indem wir den angegebenen Ausdruck (32) nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r entwickeln, für u^2, uv, v^2, ... respective setzen ε_{00}, ε_{01}, ε_{11}, ..., den so geänderten Ausdruck (32), der eine homogene Function der Variabeln $\varkappa$, λ, μ von der dritten Ordnung ist, nach Potenzen und Producten dieser Variabeln entwickeln und die Coefficienten derselben in der Entwickelung einzeln gleich 0 setzen, mit Ausnahme des zehnten Coefficienten, der mit dem Product $\varkappa\lambda\mu$ multiplicirt ist, welches unter jeder der obigen Annahmen verschwindet.

Was den Ausdruck (32) betrifft, so erinnern wir daran, dass er, gleich 0 gesetzt, nichts anderes ist, als die Gleichung derjenigen Oberfläche zweiter Ordnung, welche in Punktcoordinaten sich so darstellt:

$$\varkappa f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0.$$

An diese allgemeinen Betrachtungen schliessen sich die folgenden speciellen Untersuchungen an.

In der Bestimmung eines Systems von vier harmonischen Polen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung herrscht, wie wir gesehen haben, eine grosse Willkür. Der erste Pol 0 kann ganz willkürlich genommen werden, der zweite 1 beliebig auf der Polarebene des ersten, der dritte 2 beliebig auf der Schnittlinie der Polarebenen der beiden ersten, wodurch endlich der vierte Pol 3 als der Schnittpunkt der Polarebenen der drei ersten Pole bestimmt ist. Wählt man den Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche als den ersten Pol, so fallen zwar die drei übrigen 1, 2, 3 in das Unendliche, jedoch bleiben die Richtungslinien 01, 02, 03, in welchen die drei Pole von dem Mittelpunkte aus gesehen werden. Die drei

Durchmesser. Denn
die drei auf den Durchm
Punkte bilden ein Syste
Man nennt die co
der Oberfläche zweiter
recht stehen. Die Bes
stand der neunzehnten
Wenn zwei System
4, 5, 6, 7 einer Oberflä

weiss man, dass jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch 7 von diesen Punkten hindurchgeht, auch durch den achten Punkt geht. Lässt man die Punkte 0 und 4 zusammenfallen, so bestimmen die 5 geraden Linien 01, 02, 03, 05, 06, als Kanten, einen Kegel zweiter Ordnung. Da dieser Kegel, eine Oberfläche zweiter Ordnung, durch 7 von den genannten Punkten hindurchgeht, so geht er auch durch den achten Punkt, und die gerade Linie 07 ist mithin auch eine Kante des Kegels. Man hat daher den Satz:

Wenn von zwei Systemen harmonischer Pole einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung ein Pol des einen Systemes mit einem Pole des anderen Systemes zusammenfällt, so liegen die von dem gemeinsamen Pole nach den 6 anderen Polen gezogenen geraden Linien auf einem Kegel zweiter Ordnung.

Rücken die beiden Punkte 0 und 4 in den Mittelpunkt der Oberfläche, so werden die 6 geraden Linien 01, 02, 03, 05, 06, 07 zwei Systeme conjugirter Durchmesser der Oberfläche, und man hat den Satz:

Irgend zwei Systeme conjugirter Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung sind 6 Kanten eines Kegels zweiter Ordnung.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung durch ein System conjugirter Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung geht, so geht er durch unendlich viele Systeme conjugirter Durchmesser der Oberfläche.

Denn man kann jede Kante des Kegels als Durchmesser eines zweiten Systemes conjugirter Durchmesser betrachten. Die beiden anderen Durchmesser des Systemes, welche auf dem Kegel liegen, werden dadurch bestimmt sein.

Die um den Coordinatenanfangspunkt mit beliebigem Radius beschriebene Kugel ist, wie aus der Gleichung derselben

ersichtlich, eine Oberfläche zweiter Ordnung. Jede drei durch den Mittelpunkt gelegte und auf einander senkrecht stehende gerade Linien sind nach dem Vorhergehenden conjugirte Durchmesser der Kugel, und von zwei solchen Systemen conjugirter Durchmesser gilt der Satz:

Zwei Systeme von drei aus demselben Punkte ausgehenden geraden Linien, welche auf einander senkrecht stehen, sind 6 Kanten eines Kegels zweiter Ordnung.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung auf seiner Oberfläche drei auf einander senkrecht stehende Kanten hat, so hat er unendlich viele Systeme von drei auf einander senkrecht stehenden Kanten.

Denn man kann jede beliebige Kante des Kegels als einem solchen Systeme zugehörig betrachten.

Da eine gerade Linie eine Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Punkten schneidet, und eine Ebene dieselbe Oberfläche in einem Kegelschnitt schneidet, so muss auch eine gerade Linie, welche in der Ebene des Kegelschnittes liegt, denselben in zwei Punkten schneiden. Zwei Punkte in der Ebene des Kegelschnittes, deren Verbindungslinie den Kegelschnitt in harmonischen Punkten schneidet, sind harmonische Pole des Kegelschnittes. Drei Punkte, von welchen je zwei harmonische Pole des Kegelschnittes sind, bilden ein System harmonischer Pole des Kegelschnittes.

Dieses vorausgesetzt, kehren wir zu der beschriebenen Raumfigur zurück. Wir hatten eine Oberfläche zweiter Ordnung und irgend zwei Systeme harmonischer Pole 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7, von welchen die Pole 0 und 4 in einen Punkt 04 zusammenfielen, mithin auch die Ebenen 1 2 3 und 5 6 7 in eine Ebene E. Diese Ebene E schneidet die Oberfläche in einem Kegelschnitt, in Rücksicht auf welchen die Punkte 1, 2, 3 ein System harmonischer Pole, die Punkte 5, 6, 7 ein zweites System harmonischer Pole bilden. Wir hatten ferner einen Kegel zweiter Ordnung, der durch die genannten beiden

Systeme ging, und dessen Spitze in dem gemeinsamen Punkte 04 lag. Dieser Kegel wird von der Ebene E wieder in einem Kegelschnitt geschnitten, der durch die beiden Systeme harmonischer Pole des Kegelschnittes geht.

Sieht man ab von der Raumfigur und drückt die beschriebene Figur in der Ebene E durch Worte aus, so hat man den Satz:

Durch irgend zwei Systeme harmonischer Pole eines Kegelschnittes lässt sich wieder ein Kegelschnitt legen.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegelschnitt durch ein System harmonischer Pole eines gegebenen Kegelschnittes geht, so geht er durch unendlich viele Systeme harmonischer Pole des gegebenen Kegelschnittes.

Man kann den vorletzten Satz auch umkehren, wodurch er die Gestalt erhält:

Irgend 6 Punkte eines Kegelschnittes, in zwei Gruppen von drei Punkten zertheilt, bilden zwei Systeme harmonischer Pole eines bestimmten Kegelschnittes.

Auf die weitere Begründung dieses Satzes gehen wir jedoch nicht ein.

Werfen wir schliesslich einen Rückblick auf das am Anfange der Vorlesung behandelte Problem „die Spitzen der vier Kegel zu bestimmen, welche durch die Schnittcurve zweier gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung, $f=0$ und $\varphi=0$, hindurchgehen“, so sehen wir, dass dasselbe sich rein algebraisch auffassen lässt. Das algebraische Problem lautet also:

Die linearen Substitutionen:

$$\begin{aligned} x &= x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P, \\ y &= y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P, \\ z &= z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P, \\ p &= p_0 X + p_1 Y + p_2 Z + p_3 P, \end{aligned}$$

so zu bestimmen, dass zwei gegebene, homogene Functionen f und φ der Variabeln x, y, z, p von der zweiten Ordnung durch die Substitutionen transformirt werden in die Form:

$$f = \mu_0 X^2 + \mu_1 Y^2 + \mu_2 Z^2 + \mu_3 P^2,$$
$$\varphi = \nu_0 X^2 + \nu_1 Y^2 + \nu_2 Z^2 + \nu_3 P^2.$$

Denn macht man die angegebenen Substitutionen in den gegebenen Functionen f und φ und lässt die Coefficienten der Producte der neuen Variabeln verschwinden, so erhält man gerade die 12 Gleichungen (6), welche die Coordinaten der vier Kegelspitzen bestimmen. Daraus ergiebt sich die geometrische Bedeutung der Coefficienten in den angegebenen Substitutionen des vorgelegten algebraischen Problemes. Sie stellen nämlich die homogenen Coordinaten der Spitzen der vier Kegel dar, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen zweiter Ordnung $f = 0$ und $\varphi = 0$ hindurchlegen lassen.

Wir begnügen uns an dieser Stelle, den Zusammenhang des algebraischen Problems mit dem entsprechenden geometrischen Probleme dargelegt zu haben als Einleitung in die zwanzigste Vorlesung, in welcher das erweiterte algebraische Problem ausführlicher wird behandelt werden.

Siebenzehnte Vorlesung.

Grenzflächen zweiter Ordnung, welche acht beliebig gegebene Ebenen berühren.

Acht Tangentenebenen bestimmen eine Oberfläche zweiter Ordnung nicht vollständig. Es seien daher:

$$(1)\ldots\quad \begin{aligned} F &= A_{00}u^2 + 2A_{01}uv + A_{11}v^2 + \ldots = 0, \\ \Phi &= B_{00}u^2 + 2B_{01}uv + B_{11}v^2 + \ldots = 0 \end{aligned}$$

die homogenen Gleichungen zweier gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 gegebene Ebenen berühren. Unter dieser Voraussetzung stellt die Gleichung:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F + \lambda\Phi = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ alle Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche die 8 gegebenen Ebenen berühren, oder, um einen anderen Ausdruck zu brauchen, welche die den gegebenen beiden Oberflächen gemeinsamen Tangentenebenen berühren.

Unter den Oberflächen (2) wird wenigstens eine Grenzfläche zu finden sein, weil der unbestimmte Factor λ sich immer so bestimmen lässt, dass der in (4) der fünfzehnten Vorlesung entwickelten einzigen Bedingung für die Grenzfläche Genüge geschieht. Das heisst, es giebt wenigstens einen Kegelschnitt, welcher von 8 beliebig gegebenen Ebenen berührt wird.

Um die Anzahl der verschiedenen Grenzflächen (2) zu bestimmen, nehmen wir an, dass der Factor λ in jener Gleichung der Grenzfläche entspreche, und dass u, v, w, r die Coordinaten der Ebene der Grenzfläche seien. In dieser Voraussetzung hat man nach (3) der fünfzehnten Vorlesung:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} F'(u) + \lambda\Phi'(u) &= 0, \\ F'(v) + \lambda\Phi'(v) &= 0, \\ F'(w) + \lambda\Phi'(w) &= 0, \\ F'(r) + \lambda\Phi'(r) &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich durch Elimination der Coordinaten ergiebt:

$$(4) \quad \nabla = \begin{vmatrix} A_{00} + \lambda B_{00}, & A_{01} + \lambda B_{01}, & \ldots & A_{03} + \lambda B_{03} \\ A_{10} + \lambda B_{10}, & A_{11} + \lambda B_{11}, & \ldots & A_{13} + \lambda B_{13} \\ A_{20} + \lambda B_{20}, & A_{21} + \lambda B_{21}, & \ldots & A_{23} + \lambda B_{23} \\ A_{30} + \lambda B_{30}, & A_{31} + \lambda B_{31}, & \ldots & A_{33} + \lambda B_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist eine biquadratische in λ. Daher hat man den Satz:

Es giebt vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche alle, zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinsamen, Tangentenebenen berühren;

oder mit anderen Worten:

Es giebt vier Kegelschnitte, welche von 8 beliebig gegebenen Ebenen berührt werden.

Bezeichnet man mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (4), mit 0, 1, 2, 3 die Ebenen der vier Grenzflächen und durch Beifügung der Indices 0, 1, 2, 3 an die Variabeln respective die Coordinaten der Ebenen der vier Grenzflächen, so ergeben sich auf dem in der vorhergehenden Vorlesung eingeschlagenen Wege die Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{aligned} u_m\Phi'(u_n) + v_m\Phi'(v_n) + w_m\Phi'(w_n) + r_m\Phi'(r_n) = 0,\\ u_mF'(u_n) + v_mF'(v_n) + w_mF'(w_n) + r_mF'(r_n) = 0, \end{aligned}$$

in welchen m und n irgend zwei verschiedene von den Zahlen 0, 1, 2, 3 bedeuten, und daraus endlich:

$$\begin{aligned} u_m\{F'(u_n)+\lambda\Phi'(u_n)\} + v_m\{F(v_n)+\lambda\Phi'(v_n)\}\\ + w_m\{F'(w_n)+\lambda\Phi'(w_n)\} + r_m\{F'(r_n)+\lambda\Phi'(r_n)\} = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung folgende geometrische Deutung zulässt:

Es giebt vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche 8 gegebene Ebenen berühren. Die Ebenen dieser vier Grenzflächen bilden ein System harmonischer Polarebenen jeder Oberfläche zweiter Ordnung, welche die 8 gegebenen Ebenen berührt.

Da die vier Punkte, in welchen sich je drei Ebenen aus einem Systeme harmonischer Polarebenen schneiden, ein System harmonischer Pole bilden, so schneiden sich je drei Ebenen der vier Grenzflächen in vier Punkten, die ein System harmonischer Pole für alle jene Oberflächen zweiter Ordnung bilden. Diese Bemerkung, zusammengehalten mit den Resultaten der vorhergehenden Vorlesung, giebt den Satz:

Das zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinsame System harmonischer Pole ist nicht allein ein System harmonischer Pole für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der beiden gegebenen Oberflächen hindurchgeht, sondern auch für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche alle gemeinsamen Tangentenebenen der gegebenen beiden Oberflächen berührt. Die vier Ebenen, welche je drei harmonische Pole des Systemes verbinden, sind die

Ebenen der vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche die gemeinsamen Tangentenebenen der gegebenen beiden Oberflächen berühren.

Eliminirt man aus je zwei Gleichungen (3) den Factor λ, so erhält man die Gleichungen von sechs Oberflächen zweiter Ordnung, welche das den gegebenen beiden Oberflächen gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren. Componirt man aus diesen Gleichungen die Gleichung:

$$(6) \ldots \quad X = q_{01}\{F'(u)\Phi'(v) - F'(v)\Phi'(u)\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + q_{23}\{F'(w)\Phi'(r) - F'(r)\Phi'(w)\} = 0$$

mit den sechs willkürlichen Constanten q_{mn}, so stellt diese Gleichung in Ebenencoordinaten eine jede Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche das genannte System harmonischer Polarebenen berührt.

Zwischen den Coefficienten in der Entwickelung dieser Gleichung:

$$(7) \ldots \quad X = E_{00}u^2 + 2E_{01}uv + E_{11}v^2 + \ldots\ldots = 0$$

finden vier lineare Bedingungsgleichungen statt, von welchen wir eine besonders hervorheben, aus der die übrigen ohne Schwierigkeit hervorgehen.

Um die Gleichung der Oberfläche $F = 0$ in Punktcoordinaten zu übertragen, hat man nach den Vorschriften der zehnten Vorlesung bekanntlich die linearen Gleichungen aufzulösen:

$$\tfrac{1}{2}F'(u) = x, \quad \tfrac{1}{2}F'(v) = y, \quad \tfrac{1}{2}F'(w) = z, \quad \tfrac{1}{2}F'(r) = p,$$

welche in dem vorliegenden Falle, wo die Function F durch (1) gegeben ist, sich also gestalten:

$$\begin{aligned} A_{00}u + A_{01}v + A_{02}w + A_{03}r &= x, \\ A_{10}u + A_{11}v + A_{12}w + A_{13}r &= y, \\ A_{20}u + A_{21}v + A_{22}w + A_{23}r &= z, \\ A_{30}u + A_{31}v + A_{32}w + A_{33}r &= p. \end{aligned}$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen von der Form:

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = u, \quad \tfrac{1}{2}f'(y) = v, \quad \tfrac{1}{2}f'(z) = w, \quad \tfrac{1}{2}f'(p) = r$$

befreit von dem gemeinsamen Nenner a, seien:

$$
\begin{aligned}
a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p &= au\,,\\
a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p &= av\,,\\
a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p &= aw\,,\\
a_{30}x + a_{31}y + a_{32}z + a_{33}p &= ar\,,
\end{aligned}
$$

indem $f = 0$ oder $af = 0$ die Gleichung der Oberfläche ist in Punktcoordinaten. Alsdann hat man zwischen den 10 Coefficienten $A_{\varkappa\lambda}$ und den 10 Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ die Relationen:

$$
\begin{aligned}
a &= A_{\varkappa 0}\,a_{\varkappa 0} + A_{\varkappa 1}\,a_{\varkappa 1} + A_{\varkappa 2}\,a_{\varkappa 2} + A_{\varkappa 3}\,a_{\varkappa 3}\,,\\
0 &= A_{\varkappa 0}\,a_{\lambda 0} + A_{\varkappa 1}\,a_{\lambda 1} + A_{\varkappa 2}\,a_{\lambda 2} + A_{\varkappa 3}\,a_{\lambda 3}\,,
\end{aligned}
$$

welche wir in Worten also ausdrücken:

„Wenn man in der Entwickelung der 16 Ausdrücke:

$$
\begin{array}{llll}
\frac{1}{2}uF'(u)\,, & \frac{1}{2}vF'(u)\,, & \frac{1}{2}wF'(u)\,, & \frac{1}{2}rF'(u)\,,\\
\frac{1}{2}uF'(v)\,, & \frac{1}{2}vF'(v)\,, & \frac{1}{2}wF'(v)\,, & \frac{1}{2}rF'(v)\,,\\
\frac{1}{2}uF'(w)\,, & \frac{1}{2}vF'(w)\,, & \frac{1}{2}wF'(w)\,, & \frac{1}{2}rF'(w)\,,\\
\frac{1}{2}uF'(r)\,, & \frac{1}{2}vF'(r)\,, & \frac{1}{2}wF'(r)\,, & \frac{1}{2}rF'(r)\,,
\end{array}
$$

„für die Producte:

$$uu\,,\quad uv\,,\quad vv\,,\;\ldots\,.$$

„respective setzt:

$$a_{00}\,,\quad a_{01}\,,\quad a_{11}\,,\;\ldots\,.$$

„so gehen dieselben über in:

$$
\begin{array}{llll}
a, & 0, & 0, & 0,\\
0, & a, & 0, & 0,\\
0, & 0, & a, & 0,\\
0, & 0, & 0, & a.\text{“}
\end{array}
$$

Daraus folgt, dass das erste mit q_{01} multiplicirte Glied:

$$F'(u)\,\Phi'(v) - F'(v)\,\Phi'(u)$$

in der Gleichung (6) durch die gleiche Veränderung verschwindet. Aber es verschwindet durch diese Veränderung ebenso jedes Glied der Gleichung (6) und es wird auch die Gleichung (7) nach der genannten Veränderung erfüllt.

Es ist daher:

$$(8)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma E_{mn}\,a_{mn} = 0$$

eine von den Bedingungsgleichungen, die erfüllt werden müssen, wenn die Oberfläche (7), $X = 0$, das den beiden Oberflächen (1) $F = 0$ und $\Phi = 0$ gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren soll.

Da diese Gleichung unabhängig ist von der Natur der Oberfläche $\Phi = 0$, weil die Coefficienten aus der Gleichung der Oberfläche nicht in sie eingehen, so hat man zu ihrer Bildung folgende Regel:

Wenn:

$$E_{00}u^2 + 2E_{01}uv + E_{11}v^2 + \ldots . = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist und:

$$a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots . = 0$$

die Gleichung einer zweiten Oberfläche in Punktcoordinaten, so erhält man die Bedingungsgleichung, dass die erste Oberfläche irgend ein System harmonischer Polarebenen der zweiten Oberfläche berührt, entweder, indem man in der Ebenencoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$uu, \quad uv, \quad vv, \ldots$$

respective die Coefficienten aus der Punktcoordinatengleichung setzt:

$$a_{00}, \quad a_{01}, \quad a_{11}, \ldots$$

oder wenn man in der Punktcoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$xx, \quad xy, \quad yy, \ldots$$

respective die Coefficienten aus der Ebenencoordinatengleichung setzt:

$$E_{00}, \quad E_{01}, \quad E_{11}, \ldots$$

Aus dem Vergleich dieser Regel mit der entsprechenden der vorhergehenden Vorlesung oder der geometrischen Bedeutung der Gleichung (8) mit (9) der vorhergehenden Vorlesung geht folgender Satz hervor:

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung durch irgend ein System harmonischer Pole einer zweiten

Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgeht, so berührt die erste Oberfläche ein System harmonischer Polarebenen der zweiten Oberfläche.

Um aus der angegebenen Regel die vier linearen Bedingungsgleichungen abzuleiten, welche die Coefficienten in der Gleichung (7), $X=0$, zu erfüllen haben, wenn die durch sie dargestellte Oberfläche das den beiden Oberflächen $F=0$ und $\Phi=0$ gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren soll, bemerken wir, dass, welches auch die Werthe von $\varkappa$ und λ seien, die Gleichung:

$$\varkappa F+\lambda\Phi=0$$

eine Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, welcher jenes System harmonischer Polarebenen ebenfalls zugehört.

Drücken wir daher diese Oberfläche durch ihre Gleichung in Punktcoordinaten aus, wie folgt:

$$(9)\ \dots\ \begin{vmatrix} \varkappa A_{00}+\lambda B_{00}, & \dots & \varkappa A_{03}+\lambda B_{03}, & x \\ \varkappa A_{10}+\lambda B_{10}, & \dots & \varkappa A_{13}+\lambda B_{13}, & y \\ \varkappa A_{20}+\lambda B_{20}, & \dots & \varkappa A_{23}+\lambda B_{23}, & z \\ \varkappa A_{30}+\lambda B_{30}, & \dots & \varkappa A_{33}+\lambda B_{33}, & p \\ x, & \dots & p, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

und setzen in der Entwickelung nach Potenzen und Producten der variabeln Coordinaten für:

$$xx,\quad xy,\quad yy,\ \dots$$

respective: $$E_{00},\quad E_{01},\quad E_{11},\ \dots,$$

so erhalten wir eine Gleichung, welche für beliebige Werthe der Variabeln $\varkappa$ und λ Statt findet. Da diese Gleichung aber homogen und vom dritten Grade ist, so zerfällt sie in die gesuchten vier Bedingungsgleichungen, indem die Coefficienten der vier Potenzen und Producte der Variabeln einzeln verschwinden.

Die vier Bedingungen, dass die Oberfläche (7), $X=0$, das den beiden Oberflächen zweiter Ordnung $F=0$ und $\Psi=0$:

$$(10)\ \dots\ \Psi=C_{00}u^2+2C_{01}uv+C_{11}v^2+\dots=0$$

gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühre, erhalten wir demnach auf gleiche Weise aus der dadurch ver-

änderten Gleichung (9), dass man für den Buchstaben B den Buchstaben C setzt. Da jedoch durch diese Veränderung der Coefficient von $\varkappa^3$ in jener Gleichung ungeändert bleibt, so sieht man, dass von den vier neuen Bedingungsgleichungen eine mit einer der vier vorhin erwähnten zusammenfällt, dass also die 8 Bedingungen, welche die Oberfläche (7), $X=0$, zu erfüllen hat, wenn dieselbe sowohl das den Oberflächen $F=0$ und $\Phi=0$, als auch das den Oberflächen $F=0$ und $\Psi=0$ gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren soll, sich auf nur 7 Bedingungen reduciren.

Das Paradoxon, dass in dem vorliegenden Falle 7 Bedingungen hinreichen, damit eine Oberfläche zweiter Ordnung 8 bestimmte Ebenen berühre, findet seine Erklärung in dem Satze der elften Vorlesung „dass alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 Ebenen berühren, auch noch eine durch diese 7 Ebenen bestimmte achte Ebene berühren.“ Aus dieser Erklärung schöpfen wir zugleich den Satz, der sich auch nach dem in der zwölften Vorlesung entwickelten Princip der Reciprocität aus dem entsprechenden Satze der vorhergehenden Vorlesung leicht ableiten lässt:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 Ebenen aus zwei Systemen harmonischer Polarebenen einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung berühren, berühren auch die achte Ebene.

Der umgekehrte Satz findet gleichfalls Statt:

Acht Ebenen, welche drei Oberflächen zweiter Ordnung berühren, die von keinen Ebenen ausser diesen gemeinsam berührt werden, in zwei Gruppen von vier Ebenen zertheilt, bilden zwei Systeme harmonischer Polarebenen einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung.

Denn stellt man die 12 Bedingungen auf, dass 8 Ebenen, in zwei Gruppen von 4 Ebenen, 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7 zertheilt, zwei Systeme harmonischer Polarebenen einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung bilden, und betrachtet die Coordinaten der 7 Ebenen 1, 2 . . . 7 als gegeben, dagegen

die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche und die Coordinaten der Ebene 0 als gesucht, so hat man 9 lineare und homogene Gleichungen zwischen den Coefficienten, wodurch sich die Verhältnisse derselben unzweideutig bestimmen, und, nachdem diese bestimmt sind, noch 3 lineare homogene Gleichungen zwischen den Coordinaten der Ebene 0. Diese letzteren bestimmen auf lineare Weise die Coordinaten der achten Ebene 0, welche mit den drei anderen Ebenen 1, 2, 3 das zweite System harmonischer Polarebenen der Oberfläche bildet, oder mit anderen Worten, sie bestimmen die Coordinaten der achten Ebene 0, welche alle Oberflächen zweiter Ordnung berührt, welche die 7 gegebenen Ebenen berühren.

Aus dem vorletzten Satze folgt ferner der Satz, dessen reciproker in der vorhergehenden Vorlesung bereits entwickelt worden ist:

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung ein System harmonischer Polarebenen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung berührt, so berührt sie zugleich unendlich viele Systeme harmonischer Polarebenen der gegebenen Oberfläche.

Wenn drei Oberflächen zweiter Ordnung (1) und (10): $F=0$, $\Phi=0$, $\Psi=0$, gegeben sind, so sind mit ihnen zugleich auch drei Systeme harmonischer Polarebenen gegeben, von welchen jedes einem Oberflächenpaare zugehört. Von den 12 linearen Bedingungsgleichungen, welche die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (7), $X=0$, zu erfüllen haben, wenn diese Oberfläche jene drei Systeme harmonischer Polarebenen gleichzeitig berühren soll, fallen nach dem Vorhergehenden drei fort, weil sie doppelt vorkommen. Es reduciren sich demnach die 12 Bedingungsgleichungen auf 9, welchen die Coefficienten in der Gleichung (7), $X=0$, immer eindeutig genügen können. Man hat daher den Satz:

Drei Systeme harmonischer Polarebenen, von welchen jedes zweien von drei gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinsam ist, werden von einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung berührt.

Die 9 verschiedenen Bedingungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (7), $X = 0$, dass diese Oberfläche die drei Systeme harmonischer Polarebenen je zweier der drei gegebenen Oberflächen $F = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ berühre, ergeben sich auf einfache Art aus folgender Betrachtung.

Es stellt unter der Voraussetzung, dass eine von den drei variabeln Grössen $\varkappa$, λ, μ gleich 0 sei, die Gleichung:

$$\varkappa F + \lambda \Phi + \mu \Psi = 0$$

eine Oberfläche zweiter Ordnung dar, welcher irgend eines von den drei Systemen harmonischer Polarebenen zugehört.

Um die Bedingung auszudrücken, dass die Oberfläche (7), $X = 0$, durch ein System harmonischer Polarebenen jener Oberfläche hindurchgehe, übertragen wir jene Gleichung in Punktcoordinaten wie folgt:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \varkappa A_{00} + \lambda B_{00} + \mu C_{00}, & \ldots & \varkappa A_{03} + \lambda B_{03} + \mu C_{03}, & x \\ \varkappa A_{10} + \lambda B_{10} + \mu C_{10}, & \ldots & \varkappa A_{13} + \lambda B_{13} + \mu C_{13}, & y \\ \varkappa A_{20} + \lambda B_{20} + \mu C_{20}, & \ldots & \varkappa A_{23} + \lambda B_{23} + \mu C_{23}, & z \\ \varkappa A_{30} + \lambda B_{30} + \mu C_{30}, & \ldots & \varkappa A_{33} + \lambda B_{33} + \mu C_{33}, & p \\ x, & \ldots & p, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

entwickeln diese Gleichung nach Potenzen und Producten der variabeln Coordinaten und setzen nach der zuletzt angegebenen Regel für:

$$xx, \quad xy, \quad yy, \ldots .$$

respective: $$E_{00}, \quad E_{01}, \quad E_{11}, \ldots .$$

Die auf diese Weise geänderte Gleichung (11) ist homogen und von der dritten Ordnung in Rücksicht auf die variabeln Grössen $\varkappa$, λ, μ. Da dieselbe nun für beliebige Werthe jener variabeln Grössen, unter der Voraussetzung, dass eine, gleichviel welche, gleich 0 ist, erfüllt werden muss, wenn die Oberfläche $X = 0$ jene drei Systeme harmonischer Polarebenen berührt, so müssen von den 10 Coefficienten in der Entwickelung der Gleichung nach Potenzen und Producten der variabeln Grössen alle verschwinden mit Ausnahme des zehnten Coefficienten, der mit dem Product $\varkappa \lambda \mu$ multiplicirt

ist, welcher nicht zu verschwinden braucht, weil eben das Product selbst verschwindet.

Man erhält also die gesuchten 9 Bedingungen, wenn man jene 9 Coefficienten in der Entwickelung der auf die angegebene Weise geänderten Gleichung (11) einzeln gleich 0 setzt.

Um aus den vorgetragenen allgemeinen Sätzen specielle Folgerungen für die Ebene zu machen, schicken wir einige Definitionen und Sätze aus der Geometrie in der Ebene voraus.

Wenn, wie bekannt, der geometrische Ort des, einem gegebenen Punkte zugeordneten, harmonischen Poles einer Oberfläche zweiter Ordnung die Polarebene dieses Punktes ist, und man legt irgend eine Ebene durch den gegebenen Punkt, welche die Oberfläche in einem Kegelschnitt schneidet, so muss der geometrische Ort des, dem gegebenen Punkte zugeordneten, Poles, in Bezug auf den Kegelschnitt, eine gerade Linie sein, in welcher sich die Polarebene und die Ebene schneiden. Diese gerade Linie nennt man die Polare des Punktes in Rücksicht auf den Kegelschnitt und den gegebenen Punkt den Pol der geraden Linie.

Zwei gerade Linien in der Ebene eines Kegelschnittes, von welchen jede durch den Pol der anderen geht, sind harmonische Polaren des Kegelschnittes.

Drei gerade Linien in der Ebene des Kegelschnittes, von welchen je zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes sind, bilden ein System harmonischer Polaren des Kegelschnitts. Sie schneiden sich also zu je zweien in drei Punkten, die ein System harmonischer Pole des Kegelschnittes bilden. Man sieht hieraus ferner, dass die drei geraden Linien, welche ein System harmonischer Pole eines Kegelschnittes verbinden, ein System harmonischer Polaren des Kegelschnittes bilden.

Wir erinnern endlich an den Satz aus der vierzehnten Vorlesung, „dass 5 Tangentenebenen eines Kegels zweiter Ordnung den Kegel unzweideutig bestimmen, und dass jede 5 Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, sich als Tangentenebenen eines ganz bestimmten Kegels zweiter Ordnung betrachten lassen," woraus der Satz für die Ebene folgt, „dass 5 Tangenten eines Kegelschnittes

den Kegelschnitt unzweideutig bestimmen, und dass jede 5 gerade Linien in einer und derselben Ebene sich als die Tangenten eines ganz bestimmten Kegelschnittes betrachten lassen."

Mit diesen Daten ausgerüstet gehen wir an die Specialisirung der in dem Vorhergehenden beschriebenen Figur.

Es lag eine beliebige Oberfläche zweiter Ordnung vor und zwei Systeme harmonischer Polarebenen 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7 dieser Oberfläche. Von den letzteren wissen wir, dass jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche 7 derselben berührt, auch die achte Ebene berührt. Wir lassen die Ebenen 0 und 4 in eine und dieselbe Ebene E zusammenfallen, wodurch die 6 geraden Linien 01, 02, 03; 05, 06, 07 in jene Ebene zu liegen kommen. Die drei ersten bilden ein System harmonischer Polaren des Kegelschnittes, in welchem die Ebene E die gegebene Oberfläche schneidet. Die drei anderen bilden ebenfalls ein System harmonischer Polaren desselben Kegelschnittes. Wir beschreiben in der Ebene E einen zweiten Kegelschnitt K, welcher die 5 geraden Linien 01, 02, 03, 05, 06 berührt. Fassen wir diesen Kegelschnitt als Grenzfläche zweiter Ordnung auf, so ist derselbe eine Oberfläche zweiter Ordnung, welche von den beiden Systemen harmonischer Polarebenen 7 Ebenen berührt. Sie berührt also auch die achte Ebene, das heisst, die gerade Linie 07 ist Tangente des beschriebenen Kegelschnitts K.

Löset man die in der Ebene E beschriebene Figur ab von der Raumfigur, so beweiset sie den Satz:

Irgend zwei Systeme harmonischer Polaren eines Kegelschnittes berühren einen Kegelschnitt.

Daraus folgt weiter:

Wenn ein Kegelschnitt ein System harmonischer Polaren eines gegebenen Kegelschnittes berührt, so berührt derselbe Kegelschnitt unendlich viele Systeme harmonischer Polaren des gegebenen Kegelschnittes,

indem jede Tangente des ersten Kegelschnittes sich als eine harmonische Polare aus einem zweiten Systeme harmonischer

Polaren des gegebenen Kegelschnittes betrachten lässt, welches den ersten Kegelschnitt berührt.

Den umgekehrten Satz führen wir nur historisch an:

Irgend 6 Tangenten eines Kegelschnittes, in zwei Gruppen von 3 Tangenten vertheilt, bilden zwei Systeme harmonischer Polaren eines Kegelschnittes.

Stellt man diese Sätze zusammen mit den reciproken der vorhergehenden Vorlesung, so ergiebt sich daraus folgender:

Zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitte einbeschrieben sind, sind einem Kegelschnitte umbeschrieben; und zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitte umbeschrieben sind, sind einem Kegelschnitte einbeschrieben.

Kehren wir zurück zu der zuletzt beschriebenen Raumfigur und beschreiben in ihr einen Kegel zweiter Ordnung, welcher durch die 5 Tangentenebenen 1, 2, 3, 5, 6, die sich mit der Ebene 7 in dem Pol e der Ebene E schneiden, unzweideutig bestimmt ist, so schneidet dieser Kegel die Ebene E in einem Kegelschnitte K', der dieselben 5 Tangenten 01, 02, 03, 05, 06 hat, als der Kegelschnitt K. Es fallen daher diese beiden Kegelschnitte in einen zusammen. Da aber die gerade Linie 07 eine Tangente des Kegelschnittes K ist, so ist die Ebene 7 eine Tangentenebene des beschriebenen Kegels. Daraus entspringt der Satz:

Wenn von zwei Systemen harmonischer Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung eine Ebene des einen Systemes mit einer Ebene des anderen Systemes zusammenfällt, so berühren die 6 anderen Ebenen, welche durch den Pol der zusammenfallenden Ebenen gehen, einen Kegel zweiter Ordnung.

Rückt der Pol e in den Mittelpunkt der Oberfläche, so bilden die geraden Linien 12, 23, 31 ein System conjugirter Durchmesser der Oberfläche, gleich wie die geraden Linien

56, 67, 75 ein zweites System conjugirter Durchmesser bilden. In diesem Falle lautet der angegebene Satz also:

Die drei Ebenen, welche durch je zwei conjugirte Durchmesser eines Systemes einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung gehen und die drei Ebenen, welche durch je zwei conjugirte Durchmesser eines anderen Systemes derselben Oberfläche gehen, berühren einen Kegel zweiter Ordnung.

Daraus folgt ferner:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung drei Ebenen berührt, welche sich paarweise in drei conjugirten Durchmessern einer Oberfläche zweiter Ordnung schneiden, so berührt der Kegel unendlich viele Systeme von drei Ebenen, die sich paarweise in den conjugirten Durchmessern der Oberfläche schneiden.

Ist die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung eine Kugel, so hat man den Satz:

Drei Ebenen, welche auf einander senkrecht stehen, und drei andere auf einander senkrecht stehende Ebenen, die sich in demselben Punkte, als die drei ersten, schneiden, berühren einen Kegel zweiter Ordnung.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung ein System von drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen berührt, so berührt er unendlich viele Systeme von drei Ebenen, die auf einander senkrecht stehen.

Wir schliessen diese Vorlesung mit der Bemerkung, dass das Problem der vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche von allen Ebenen berührt werden, die gleichzeitig zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung, $F = 0$ und $\Phi = 0$, berühren, von welchem Problem unsere Untersuchungen ausgingen, sich als ein rein algebraisches auffassen lässt, nämlich:

Die linearen Substitutionen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} u &= u_0 U + u_1 V + u_2 W + u_3 R, \\ v &= v_0 U + v_1 V + v_2 W + v_3 R, \\ w &= w_0 U + w_1 V + w_2 W + w_3 R, \\ r &= r_0 U + r_1 V + r_2 W + r_3 R, \end{aligned}$$

welche zwei gegebene homogene Functionen F und Φ der Variabeln u, v, w, r der zweiten Ordnung transformiren in die Form:

$$F = \frac{U^2}{\mu_0} + \frac{V^2}{\mu_1} + \frac{W^2}{\mu_2} + \frac{R^2}{\mu_3},$$
$$\Phi = \frac{U^2}{\nu_0} + \frac{V^2}{\nu_1} + \frac{W^2}{\nu_2} + \frac{R^2}{\nu_3}.$$

Denn drückt man die Bedingungen des Problems aus, so erhält man die Gleichungen (5), welche die Ebenen der vier Grenzflächen bestimmen.

Dieses Problem in weiterer Ausdehnung wird, wie bereits angedeutet worden, den Gegenstand der zwanzigsten Vorlesung bilden.

Achtzehnte Vorlesung.

Lineare Coordinaten-Transformation. Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte.

Wenn irgend drei Gleichungen zwischen den drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes q im Raume und drei anderen Grössen X, Y, Z gegeben sind, so nennt man letztere im weitesten Sinne des Wortes Coordinaten des Punktes, weil sie, gleich viel, ob eindeutig oder mehrdeutig, durch die gegebenen Gleichungen die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes und durch sie den Punkt q im Raume bestimmen.

Ein specieller Fall solcher Coordinaten sind die elliptischen Raumcoordinaten, welche den Gegenstand einer besonderen Vorlesung bilden werden.

Ein anderer specieller Fall ist der, wenn die drei gegebenen Gleichungen von der Form sind:

$$(1) \ldots\ldots \quad X = \frac{U_0}{U_3}, \quad Y = \frac{U_1}{U_3}, \quad Z = \frac{U_2}{U_3},$$

in welchen sämmliche U lineare Ausdrücke allein der rechtwinkligen Coordinaten bedeuten. In diesem Falle nennt man die Coordinaten X, Y, Z lineare Coordinaten, weil sie durch die rechtwinkligen Coordinaten eindeutig bestimmt sind, und weil sie zugleich wieder die rechtwinkligen Coordinaten eindeutig bestimmen.

Um die geometrische Bedeutung dieser linearen Coordinaten festzustellen, bilden wir die Gleichungen von vier Ebenen:

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0,$$

welche durch die Transformationsformeln (1) gegeben sind. Auf diese vier, als die Seitenflächen eines Tetraeders, des Coordinaten-Tetraeders, aufgefassten Ebenen, werden wir die linearen Coordinaten beziehen.

Die Gleichungen der vier Ebenen führen wir durch Multiplication mit den Factoren μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, nach (5) der zweiten Vorlesung, zurück auf ihre Normalformen:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0,$$

welche wir in (1) für die allgemeinen Formen einführen, indem wir setzen:

$$U_0 = \frac{A_0}{\mu_0}, \quad U_1 = \frac{A_1}{\mu_1}, \quad U_2 = \frac{A_2}{\mu_2}, \quad U_3 = \frac{A_3}{\mu_3}.$$

Da in die Gleichungen (1), nach den angegebenen Substitutionen, nur die Verhältnisse der Factoren μ eingehen, so kann man, ohne die Allgemeinheit dieser Gleichungen zu beschränken, annehmen, dass sämmtliche Factoren μ kleiner als 1 seien und gleich den Sinus gewisser Winkel, nämlich:

$$\mu_0 = \sin\alpha_0, \quad \mu_1 = \sin\alpha_1, \quad \mu_2 = \sin\alpha_2, \quad \mu_3 = \sin\alpha_3.$$

Wir denken uns nun vier Richtungslinien L_0, L_1, L_2, L_3 im Raume, jede derselben einer Seitenfläche des Tetraeders entsprechend der Art, dass die Richtungslinie L_0 mit der Seitenfläche $U_0 = 0$ den Neigungswinkel α_0 bildet, dass die Richtungslinie L_1 mit der Seitenfläche $U_1 = 0$ den Neigungs-

winkel α_1 bildet, und so ferner. Ziehen wir alsdann von dem Punkte q vier gerade Linien, parallel den vier bestimmten Richtungslinien, bis sie respective die Seitenflächen des Tetraeders schneiden und bezeichnen ihre Längen mit l_0, l_1, l_2, l_3, so haben wir, weil A_0, A_1, A_2, A_3, nach (8) der zweiten Vorlesung die negativen Abstände des Punktes q von den Seitenflächen des Tetraeders ausdrücken:

$$-l_0 = U_0, \quad -l_1 = U_1, \quad -l_2 = U_2, \quad -l_3 = U_3,$$

und die Gleichungen (1) gehen bei dieser Bezeichnung über in:

$$X = \frac{l_0}{l_3}, \quad Y = \frac{l_1}{l_3}, \quad Z = \frac{l_2}{l_3},$$

welche Gleichungen die geometrische Bedeutung der linearen Coordinaten X, Y, Z erkennen lassen.

Löset man das System Gleichungen (1) nach den rechtwinkligen Coordinaten des Punktes q auf, so erhält man Gleichungen von derselben Form:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{u_0}{u_3}, \quad y = \frac{u_1}{u_3}, \quad z = \frac{u_2}{u_3},$$

indem sämmtliche u lineare Ausdrücke der linearen Coordinaten X, Y, Z bezeichnen, von derselben Willkürlichkeit in den Coefficienten, als die Ausdrücke U in den Gleichungen (1). Man kann daher auch die Gleichungen (2) an Stelle der Gleichungen (1) als die ursprünglichen nehmen.

Es ist in vielen Fällen zweckmässig, statt dreier linearen Coordinaten vier **homogene lineare Coordinaten** X, Y, Z, P zu brauchen, indem man für X, Y, Z setzt $\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}, \frac{Z}{P}$. Sie bedeuten gerade die in dem Vorhergehenden bezeichneten Längen l_0, l_1, l_2, l_3. Multiplicirt man nach Einführung dieser vier Coordinaten Zähler und Nenner der Ausdrücke (2) mit P, so werden die u in (2) von der Form:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} u_0 &= x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P, \\ u_1 &= y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P, \\ u_2 &= z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P, \\ u_3 &= p_0 X + p_1 Y + p_2 Z + p_3 P. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der 16 Coefficienten in diesen Ausdrücken ergiebt sich, wenn man je drei von den

linearen homogenen Coordinaten gleich 0 setzt. Setzt man zum Beispiel $Y = Z = P = 0$, wodurch der Schnittpunkt der drei Ebenen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ ausgedrückt wird, so erhält man für diesen Schnittpunkt aus (2) die rechtwinkligen Coordinaten:

$$x = \frac{x_0}{p_0}, \quad y = \frac{y_0}{p_0}, \quad z = \frac{z_0}{p_0}.$$

Es sind hiernach x_0, y_0, z_0, p_0 die rechtwinkligen homogenen Coordinaten der Ecke des Coordinaten-Tetraeders, welche der Seitenfläche $U_0 = 0$ gegenüber liegt; und so ferner.

Ein specieller Fall unserer linearen Coordinaten-Bestimmung verdient hervorgehoben zu werden, weil er eine statische Deutung zulässt. Wir meinen den Fall, wenn $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$, für welchen die Gleichungen (2) die Gestalt erhalten:

$$(4) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= \frac{x_0 X + x_1 Y + x Z + x_3 P}{X + Y + Z + P}, \\ y &= \frac{y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P}{X + Y + Z + P}, \\ z &= \frac{z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P}{X + Y + Z + P}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nämlich die Längen der linearen homogenen Coordinaten X, Y, Z, P als Gewichte, welche an den Ecken des Coordinaten-Tetraeders ohne Masse in der Richtung der Schwerkraft wirken, so sind bekanntlich die Ausdrücke für x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunktes q des Systemes, dessen Lage sich im Raume zugleich mit den Gewichten beliebig ändert. Diese Gewicht-Coordinaten bilden das Fundament des barycentrischen Calculs von Moebius, eines der vielen Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie.

Kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück und führen, indem wir für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z setzen $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$, die homogenen rechtwinkligen Coordinaten ein, so ergeben sich aus (2) folgende Substitutionen:

$$(5) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P, \\ y &= y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P, \\ z &= z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P, \\ p &= p_0 X + p_1 Y + p_2 Z + p_3 P \end{aligned}$$

zur Uebertragung aus dem rechtwinkligen Systeme in das Tetraeder-System.

Die aufgelösten Gleichungen (5):

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} X &= u_0 x + v_0 y + w_0 z + r_0 p, \\ Y &= u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 p, \\ Z &= u_2 x + v_2 y + w_2 z + r_2 p, \\ P &= u_3 x + v_3 y + w_3 z + r_3 p \end{aligned}$$

dienen zur Uebertragung aus dem Tetraeder-Systeme in das rechtwinklige System. Die Coefficienten in den letzten Gleichungen erweisen sich als die Coordinaten der vier Seitenflächen des Coordinaten-Tetraeders.

Die Coefficienten in beiden Substitutionen (5) und (6) sind ganz unabhängig von der Lage des Punktes q. Sie hängen ab von der Lage der Coordinatensysteme zu einander und ihrer Gestalt. Sie hängen ausserdem ab von den Richtungslinien L, weil in die Substitutionen nicht bloss die Verhältnisse der homogenen Coordinaten der Ecken oder die Verhältnisse der homogenen Coordinaten der Seitenflächen des Coordinaten-Tetraeders eingehen.

Wenn neben dem genannten Tetraeder-Systeme noch ein zweites derselben Art gegeben ist, so vermitteln Gleichungen von derselben Form als (5) den Uebergang von dem rechtwinkligen System in das zweite Tetraeder-System. Setzt man in beiden Systemen Gleichungen die Ausdrücke x einander gleich, ebenso die Ausdrücke für y, und so ferner, so erhält man Relationen für die Uebertragung von einem Tetraeder-System in ein anderes Tetraeder-System. Die Auflösungen dieser linearen Relationen nach den Coordinaten eines und desselben Systemes führen wieder auf Gleichungen von der Gestalt (5) zurück. In diesen Gleichungen hängen die Coefficienten der Coordinaten des anderen Systemes allein ab von der Lage der Tetraeder-Systeme zu einander, von ihrer Gestalt und von den Richtungslinien beider Systeme.

Durch diese linearen Transformationen ändert sich die Ordnung einer homogenen Gleichung nicht. Deshalb wird jede homogene Gleichung der Coordinaten der zweiten Ordnung, gleichviel auf welches lineare Coordinatensystem sie sich bezieht, immer eine Oberfläche zweiter Ordnung darstellen,

sowie eine homogene Gleichung erster Ordnung eine Ebene; und eine beliebig gegebene Oberfläche zweiter Ordnung oder Ebene wird in jedem linearen Coordinatensysteme sich durch eine Gleichung zweiter oder erster Ordnung analytisch ausdrücken lassen.

Nimmt man an, die Gleichungen (5) seien die Transformationsformeln zur Uebertragung von einem Tetraedersysteme in ein beliebiges andere, und es sei die Gleichung einer Ebene in dem ersten Systeme gegeben:

$$ux + vy + wz + rp = 0,$$

so geht dieselbe durch die Substitutionen (5) über in eine von gleicher Form:

$$UX + VY + WZ + RP = 0,$$

indem man hat:

$$(7) \quad \begin{aligned} U &= x_0 u + y_0 v + z_0 w + p_0 r, \\ V &= x_1 u + y_1 v + z_1 w + p_1 r, \\ W &= x_2 u + y_2 v + z_2 w + p_2 r, \\ R &= x_3 u + y_3 v + z_3 w + p_3 r. \end{aligned}$$

Nennt man die, die Ebene im ersten Coordinatensystem bestimmenden, Coefficienten u, v, w, r homogene Ebenencoordinaten in dem ersten, und demnach die Coefficienten U, V, W, R homogene Ebenencoordinaten in dem zweiten linearen Coordinatensysteme, so hat man zur Uebertragung aus dem einen Systeme in das andere die Gleichungen (7).

Löset man diese Gleichungen auf, um die Ebenencoordinaten des ersten Systemes auszudrücken durch die entsprechenden Ebenencoordinaten des zweiten Systemes, so erhält man, da die Gleichungen (6) die Auflösungen sind der Gleichungen (5), auf Grund von (23) der siebenten Vorlesung:

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= u_0 U + u_1 V + u_2 W + u_3 R, \\ v &= v_0 U + v_1 V + v_2 W + v_3 R, \\ w &= w_0 U + w_1 V + w_2 W + w_3 R, \\ r &= r_0 U + r_1 V + r_2 W + r_3 R. \end{aligned}$$

Auch diese Substitutionen ändern die Ordnung einer homogenen Gleichung nicht. Es ist daher in jedem linearen Coordinatensystem eine homogene Gleichung der zweiten Ordnung

in Ebenencoordinaten der analytische Ausdruck für eine Oberfläche zweiter Ordnung und eine homogene Gleichung der ersten Ordnung der analytische Ausdruck für einen Punkt.

Wir schliessen diese allgemeinen Betrachtungen mit der Bemerkung, dass, wenn man in der Gleichung einer auf ein beliebiges lineares Coordinatensystem bezogenen Oberfläche in Punktcoordinaten eine der Coordinaten gleich 0 setzt, man den analytischen Ausdruck der Curve erhält, in welcher die eine Seitenfläche des Coordinaten-Tetraeders die Oberfläche schneidet. Hierdurch ändert sich der Grad der Gleichung nicht und es wird die Schnittcurve einer Oberfläche zweiter Ordnung und einer beliebigen Ebene, die man für eine Seitenfläche des Coordinaten-Tetraeders nehmen kann, eine Curve zweiter Ordnung, das ist ein Kegelschnitt.

Als einen speciellen Fall des Tetraeder-Coordinatensystemes lässt sich das schiefwinklige Coordinatensystem betrachten. Denn lässt man drei Ecken des Coordinaten-Tetraeders in das Unendliche fallen, und nimmt an, dass drei von den Richtungslinien respective den drei im Endlichen liegenden Kanten des Tetraeders parallel gehen, so hat man das schiefwinklige Coordinatensystem.

Um aus den allgemeinen Transformationsformeln (2) für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein beliebiges Tetraedersystem, unter Vermittelung von (3), die dem speciellen Falle entsprechenden Transformationsformeln herzuleiten, hat man zu setzen $p_0 = p_1 = p_2 = 0$. Da für alle im Endlichen liegenden Punkte die ihnen entsprechenden unendlich grossen Werthe von P einander gleich und constant sind, so nehmen die Gleichungen (2) die Form an:

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z + a''', \\ (9) \quad \ldots\ldots \quad y &= bX + b'Y + b''Z + b''', \\ z &= cX + c'Y + c''Z + c''', \end{aligned}$$

woselbst $a''' = \frac{x_3}{p_3}$, $b''' = \frac{y_3}{p_3}$, $c''' = \frac{z_3}{p_3}$ die rechtwinkligen Coordinaten der im Endlichen liegenden Ecke des Coordinaten-Tetraeders, des Anfangspunktes des schiefwinkligen Systemes, bedeuten. Diese Bedeutung ergiebt sich aus den Transformationsformeln (9), wenn man daselbst setzt: $X = Y = Z = 0$.

Der Durchgang durch das Unendliche zur Herleitung der Formeln (9) wird auf folgendem Wege vermieden.

Es seien:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0$$

die Normalformen der Gleichungen der drei Coordinatenebenen irgend eines schiefwinkligen Coordinatensystemes, bezogen auf das zum Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem. Bedeuten nun x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes q im Raume, so sind A_0, A_1, A_2 die negativen senkrechten Abstände des Punktes q von den erwähnten drei Coordinatenebenen. Bezeichnet man ferner mit α_0, α_1, α_2 die Winkel, welche die Schnittlinien je zweier Coordinatenebenen, die Coordinatenaxen des schiefwinkligen Systemes, mit der dritten Coordinatenebene bilden, und mit X, Y, Z die Coordinaten des Punktes q in dem schiefwinkligen Systeme, welche den Coordinatenaxen parallel gehen, so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten folgende lineare Gleichungen:

$$(10) \;.\,.\quad X = \frac{-A_0}{\sin\alpha_0}, \qquad Y = \frac{-A_1}{\sin\alpha_1}, \qquad Z = \frac{-A_2}{\sin\alpha_2},$$

in welchen die geometrische Bedeutung der in ihnen enthaltenen 12 Constanten ohne Weiteres zu Tage tritt. Die Auflösungen dieser Gleichungen nach den Coordinaten des rechtwinkligen Systemes geben wieder Gleichungen von der Form (9).

Wie diese Gleichungen (9) den Uebergang vermitteln von dem rechtwinkligen Coordinatensysteme in ein beliebiges schiefwinkliges Coordinatensystem, so dienen analog gebildete Gleichungen mit veränderten Constanten zur Transformation von dem rechtwinkligen Systeme in ein beliebiges andere schiefwinklige Coordinatensystem. Setzt man nun in beiden Systemen Gleichungen die Ausdrücke für x, für y u. s. w. einander gleich, so erhält man drei lineare Gleichungen zur Uebertragung von dem einen schiefwinkligen Systeme unmittelbar in das andere. Aus den Auflösungen dieser Gleichungen nach den Coordinaten eines und desselben Systemes gehen Gleichungen hervor wieder von der Form (9), wobei zu bemerken ist, dass die 12 Coefficienten in den aufgelösten Gleichungen unabhängig sind von der Lage des beliebig im Raume gewählten Punktes q und nur abhängen von der Lage und Gestalt der beiden Coordinatensysteme.

Wir werden im Folgenden annehmen, die Gleichungen (9) seien die Transformationsformeln von einem schiefwinkligen Coordinatensysteme in ein beliebiges andere schiefwinklige Coordinatensystem, um die geometrische Bedeutung der 12 Constanten unter dieser Voraussetzung zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke lassen wir den beliebigen Punkt q im Raume in den Anfangspunkt des zweiten Coordinatensystemes XYZ fallen, indem wir setzen $X = Y = Z = 0$, wodurch die Coordinaten des genannten Anfangspunktes in dem ersten Systeme erhalten werden: $x = a'''$, $y = b'''$, $z = c'''$. Es bedeuten also die Constanten a''', b''', c''' in (9) die Coordinaten des Anfangspunktes des zweiten Systemes in dem ersten.

Setzen wir $x + a'''$, $y + b'''$, $z + c'''$ respective für x, y, z, so ändern wir damit nur den Coordinatenanfangspunkt des ersten Coordinatensystemes, indem wir ihn in den Coordinatenanfangspunkt des zweiten Systemes verlegen, lassen aber die Richtungen der Coordinatenaxen des ersten Systemes ungeändert. Durch diese Veränderung gehen die Gleichungen (9) über in:

$$(11) \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z. \end{aligned}$$

Sie vermitteln den Uebergang von einem beliebigen schiefwinkligen Coordinatensysteme in ein beliebiges andere schiefwinklige Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte.

Um die geometrische Bedeutung der 9 Constanten in diesen Gleichungen zu ermitteln, welche dieselben sind, als in den Gleichungen (9), verlegen wir den beliebigen Punkt q des Raumes in die XAxe, vom gemeinsamen Anfangspunkte beider Coordinatensysteme um die Einheit entfernt. Fällt man nun Lothe von dem so gelegenen Punkte q auf die yz, zx, xy Ebene und bezeichnet die Winkel, welche die XAxe mit den genannten Ebenen bildet, mit (X, yz), (X, zx), (X, xy) u. s. w., so sind die Lothe auf die genannten Ebenen respective gleich:

$$\sin(X, yz), \quad \sin(X, zx), \quad \sin(X, xy)$$

und, durch die Coordinaten x, y, z des Punktes q in dem ersten Systeme ausgedrückt:

$$x \sin(x, yz), \quad y \sin(y, zx), \quad z \sin(z, xy),$$

weshalb man für den bezeichneten Punkt q hat:

$$x = \frac{\sin(X, yz)}{\sin(x, yz)}, \quad y = \frac{\sin(X, zx)}{\sin(y, zx)}, \quad z = \frac{\sin(X, xy)}{\sin(z, xy)}.$$

Da aber für den so gelegenen Punkt q ist: $X = 1$, $Y = Z = 0$, so hat man auch nach (11):

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

und daher:

$$a = \frac{\sin(X, yz)}{\sin(x, yz)}, \quad b = \frac{\sin(X, zx)}{\sin(y, zx)}, \quad c = \frac{\sin(X, xy)}{\sin(z, xy)}.$$

Auf diese Weise erhält man die folgende geometrische Bedeutung der 9 Coefficienten in (9) oder (11):

$$(12) \quad \begin{aligned} a &= \frac{\sin(X, yz)}{\sin(x, yz)}, & b &= \frac{\sin(X, zx)}{\sin(y, zx)}, & c &= \frac{\sin(X, xy)}{\sin(z, xy)}, \\ a' &= \frac{\sin(Y, yz)}{\sin(x, yz)}, & b' &= \frac{\sin(Y, zx)}{\sin(y, zx)}, & c' &= \frac{\sin(Y, xy)}{\sin(z, xy)}, \\ a'' &= \frac{\sin(Z, yz)}{\sin(x, yz)}, & b'' &= \frac{\sin(Z, zx)}{\sin(y, zx)}, & c'' &= \frac{\sin(Z, xy)}{\sin(z, xy)}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, wenn das erste Coordinatensystem rechtwinklig ist, folgende Werthe der 9 Coefficienten:

$$(13) \quad \begin{aligned} a &= \cos(X, x), & b &= \cos(X, y), & c &= \cos(X, z), \\ a' &= \cos(Y, x), & b' &= \cos(Y, y), & c' &= \cos(Y, z), \\ a'' &= \cos(Z, x), & b'' &= \cos(Z, y), & c'' &= \cos(Z, z), \end{aligned}$$

Wenn beide Coordinatensysteme rechtwinklig sind, welchen Fall wir allein in dem Folgenden in Betracht ziehen werden, müssen sich diese 9 Coefficienten durch die drei Bestimmungsstücke der Lage des zweiten Systemes zu dem ersten ausdrücken lassen.

Euler drückt die 9 Coefficienten aus durch drei Winkel, nämlich durch die beiden Winkel, welche die Schnittlinie der Coordinatenebenen xy und XY mit der x Axe und mit der XAxe bildet, und durch den Neigungswinkel, den die genannten beiden Coordinatenebenen bilden. Da jedoch diese Ausdrucksweise der Symmetrie gänzlich entbehrt, so stellt er in einer zweiten Behandlung des Gegenstandes die 9 Coefficienten als Functionen von vier Winkeln in symmetrischer Weise dar. Er wählt zu diesem Zwecke die drei Winkel,

welche die Drehungsaxe, um die das eine Coordinatensystem gedreht werden muss, um in die Lage des andern zu kommen, mit den Coordinatenaxen bildet, und den Drehungswinkel. Indem er diesen symmetrischen Ausdrücken der 9 Coefficienten noch die symmetrische Relation zwischen den genannten drei Winkeln der Drehungsaxe beifügt, so giebt ihm diese Relation einen Ersatz für die erste Ausdrucksweise durch drei Bestimmungsstücke.

Monge bewahrt die Symmetrie, indem er die 9 Coefficienten durch drei derselben a, b', c'' ausdrückt, welche eine symmetrische Lage zu den übrigen haben.

Alle diese Ausdrücke sind irrational. In den Euler'schen Formeln ist die Irrationalität nur verdeckt durch den Gebrauch der Sinus- und Cosinus-Functionen. Wir werden es im Folgenden vermeiden, irrationale Ausdrücke zu gebrauchen, indem wir, wie es bereits üblich geworden ist, alle 9 Coefficienten beibehalten, sie aber durch die 6 Bedingungen beschränken, welche zwischen ihnen stattfinden.

Es seien die Transformationsformeln für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein beliebiges andere rechtwinklige Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte:

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z. \end{aligned}$$

Das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes q im Raume von dem gemeinsamen Anfangspunkte der Coordinatensysteme ist in dem einen Systeme $x^2 + y^2 + z^2$, in dem anderen $X^2 + Y^2 + Z^2$. Man hat daher die durch die Substitutionen (14) identische Gleichung:

$$(15) \quad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Wenn man in diese Gleichung die Werthe der Coordinaten (14) des ersten Systemes einsetzt und beide Seiten der Gleichung vergleicht, so erhält man die 6, zwischen den 9 Coefficienten der Substitutionen stattfindenden, Relationen:

$$(16) \ldots \begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''a + b''b + c''c = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0. \end{array}$$

Dass diese 6 Bedingungsgleichungen hinreichen, um unter der Voraussetzung, dass das erste Coordinatensystem ein rechtwinkliges sei, auch das andere Coordinatensystem zu einem rechtwinkligen zu machen, geht aus der geometrischen Interpretation dieser Gleichungen hervor. Denn mit Rücksicht auf (13) drücken die drei letzten Gleichungen (16) die Bedingungen aus, dass die Coordinatenaxen des zweiten Systemes auf einander senkrecht stehen, während die drei ersten die bekannten Bedingungen sind zwischen den Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen des zweiten Systemes mit den Coordinatenaxen des ersten Systemes bilden.

Welche Relationen man überdies ohne weitere Beschränkung zwischen den 9 Coefficienten ableiten mag, sie werden sich alle aus den angegebenen 6 Bedingungsgleichungen (16) ableiten lassen. Die nachfolgenden Relationen bieten Beispiele für Ableitungen der Art dar.

Von den unendlich vielen, zwischen den 9 Coefficienten der Substitutionen (14) stattfindenden, Relationen werden wir vorerst auf dem einfachsten Wege nur die gebräuchlichsten entwickeln.

Wir differentiiren zu diesem Zwecke die durch die Substitutionen (14) identische Gleichung (15) nach den Variabeln X, Y, Z, wodurch wir erhalten:

$$(17) \ldots\ldots\ldots \begin{array}{l} X = ax + by + cz, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z, \end{array}$$

welche Gleichungen die Auflösungen sind der Substitutionen (14), mit denselben Coefficienten, aber veränderter Anordnung.

Die Substitution von (17) in die Gleichung (15) und die Vergleichung beider Seiten der Gleichung mit einander giebt:

$$(18) \ldots \begin{array}{ll} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{array}$$

Bildet man die Determinante Δ:

$$(19) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}$$

$$= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$

und erhebt dieselbe zum Quadrat, so erhält man:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix},$$

oder nach (31) der siebenten Vorlesung:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2, & aa' + bb' + cc', & aa'' + bb'' + cc'' \\ a'a + b'b + c'c, & a'^2 + b'^2 + c'^2, & a'a'' + b'b'' + c'c'' \\ a''a + b''b + c''c, & a''a' + b''b' + c''c', & a''^2 + b''^2 + c''^2 \end{vmatrix}$$

und mit Rücksicht auf (16):

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Die Determinante Δ selbst ist hinernach entweder $+1$ oder -1. Wir werden im Folgenden annehmen, sie sei gleich $+1$. Denn wäre sie -1, so brauchte man nur für X, Y, Z respective zu setzen $-X, -Y, -Z$, was geometrisch darauf hinauskäme, die negativen Richtungen der Coordinatenaxen des zweiten Coordinatensystemes für die positiven zu nehmen. Wir haben daher:

$$(20) \quad \Delta = 1.$$

Es ist diese Determinante Δ der gemeinsame Nenner der Bruchwerthe der Unbekannten X, Y, Z, welche die directe Auflösung der Gleichungen (14) ergiebt. Vergleicht man diese directen Auflösungen mit den Auflösungen (17), so erhält man folgende Relationen:

$$(21) \quad \begin{aligned} b'c'' - b''c' &= a, & c'a'' - c''a' &= b, & a'b'' - a''b' &= c, \\ b''c - bc'' &= a', & c''a - ca'' &= b', & a''b - ab'' &= c', \\ bc' - b'c &= a'', & ca' - c'a &= b'', & ab' - a'b &= c''. \end{aligned}$$

Von diesen 22 Relationen zwischen den 9 Coefficienten der Transformationsformeln für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein beliebiges andere rechtwinklige Coordinatensystem mit ungeändertem Anfangspunkte macht man den häufigsten Gebrauch. Wir werden aber noch andere Relationen entwickeln zum Zwecke der Verwendung auf nachfolgende Untersuchungen. An dieser Stelle brauchen sie in dem Zusammenhange nur hingeschrieben zu werden, während sie aus dem Zusammenhange sich nicht ohne Rechnung herleiten lassen. Wir beginnen mit der Entwickelung der Transformationsformeln für Ebenencoordinaten.

Die Gleichung einer Ebene:

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

deren Coordinaten u, v, w sind, wird durch die Substitutionen (14) transformirt auf das zweite rechtwinklige Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte und nimmt die Gestalt an:

$$UX + VY + WZ + 1 = 0,$$

indem man für die Ebenencoordinaten im zweiten Systeme die Ausdrücke hat:

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} U &= au + bv + cw, \\ V &= a'u + b'v + c'w, \\ W &= a''u + b''v + c''w. \end{aligned}$$

Es sind dieses die gesuchten Transformationsformeln für Ebenencoordinaten aus einem rechtwinkligen Systeme in ein anderes ebenfalls rechtwinkliges System mit demselben Coordinatenanfangspunkte.

Der Vergleich mit den Substitutionen (17) zeigt, dass man nur die Punktcoordinaten mit den entsprechenden Ebenencoordinaten zu vertauschen braucht, um die Transformationsformeln der einen aus den anderen zu erhalten. Macht man diese Vertauschungen in (14), so erhält man die Auflösungen der Gleichungen (22):

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} u &= aU + a'V + a''W, \\ v &= bU + b'V + b''W, \\ w &= cU + c'V + c''W. \end{aligned}$$

Wenn nun in dem Vorhergehenden die 9 Coefficienten in den Substitutionen (14) oder (17) keiner weiteren Beschränkung unterlagen, als der, dass die Substitutionen die Gleichung (15) zu einer identischen machen, so werden auch die 9 Coefficienten in den Substitutionen (23) oder (22) nur die einzige Bedingung zu erfüllen brauchen, dass die Substitutionen die Gleichung:

$$(24) \ldots \quad u^2 + v^2 + w^2 = U^2 + V^2 + W^2,$$

zu einer identischen Gleichung machen.

Multiplicirt man die Gleichungen (22) der Reihe nach mit X, Y, Z und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (14):

$$(25) \ldots \quad UX + VY + WZ = ux + vy + wz,$$

eine Gleichung, welche sowohl durch die Substitutionen (17) und (22), als durch die Substitutionen (14) und (23) zu einer identischen wird, wovon man sich auch nachträglich überzeugen kann.

Diese identische Gleichung (25) wird die Quelle zahlreicher Relationen zwischen den 9 Coefficienten in den Transformationsformeln rechtwinkliger Coordinatensysteme sein, die sich aus ihr ergeben, wenn man beide Theile der Gleichung quadrirt oder beide Theile der Gleichung zur dritten Potenz oder endlich zur $m$ten Potenz erhebt. Da bei dieser Gelegenheit der polynomische Lehrsatz berufen ist, eine Rolle zu spielen, so wollen wir, um im Folgenden nicht gehindert zu sein, es nicht unterlassen, die Ausdrücke hervorzuheben, durch welche die Polynomialcoefficienten dargestellt werden.

Das Product der ganzen Zahlen $1, 2 \ldots \alpha$ bezeichnet man mit den Zeichen:

$$(26) \ldots \quad \Pi(\alpha) = 1 \,.\, 2 \ldots \alpha, \quad \Pi(1) = 1, \quad \Pi(0) = 1.$$

Unter dem Zeichen $C_{\alpha\beta\gamma}$ soll im Folgenden das Product verstanden sein:

$$(27) \ldots \quad C_{\alpha\beta\gamma} = \Pi(\alpha) \,.\, \Pi(\beta) \,.\, \Pi(\gamma).$$

In dieser Voraussetzung ist $\frac{\Pi(\alpha+\beta+\gamma)}{\Pi(\alpha) \,.\, \Pi(\beta) \,.\, \Pi(\gamma)}$ der Ausdruck für einen beliebigen Coefficienten in der Entwickelung der $(\alpha+\beta+\gamma)$ten Potenz der Summe von drei Grössen.

Wenn man beide Theile der Gleichung (25) zur $m$ten Potenz erhebt, so erhält man mit Unterdrückung des Factors $\Pi(m)$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$(28) \ldots \quad \Sigma \frac{1}{C_{\alpha\beta\gamma}} U^\alpha V^\beta W^\gamma X^\alpha Y^\beta Z^\gamma = \Sigma \frac{1}{C_{\alpha\beta\gamma}} u^\alpha v^\beta w^\gamma x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

vorausgesetzt, dass α, β, γ alle gleichen und ungleichen Werthe 0, 1, 2 ... annehmen unter der einzigen Bedingung:

$$\alpha + \beta + \gamma = m.$$

Es seien nun a, b, c drei gegebene gleiche oder ungleiche Zahlen 0, 1, 2 ... ebenfalls unter der Bedingung:

$$a + b + c = m.$$

Wenn wir nun in dem Producte $u^\alpha v^\beta w^\gamma$ die Substitutionen (23) machen und in dem Producte $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ die Substitutionen (14) und entwickeln, so tritt in der ersten Entwickelung ein Glied auf mit dem Factor $U^a V^b W^c$. Den Coefficienten dieses Gliedes werden wir bezeichnen mit $C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma}$. Denselben Coefficienten hat auch dasjenige Glied der zweiten Entwickelung, welches mit $X^a Y^b Z^c$ multiplicirt ist. Auf diese Weise sind sämmtliche $A_{\alpha\beta\gamma}$ definirt als Entwickelungscoefficienten, wie es die beiden folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$(29) \qquad u^\alpha v^\beta w^\gamma = \ldots + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} U^a V^b W^c + \ldots.$$

$$(30) \qquad x^\alpha y^\beta z^\gamma = \ldots + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} X^a Y^b Z^c + \ldots.$$

Denken wir uns nun (29) substituirt in (28) und setzen die Coefficienten von $U^a V^b W^c$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, oder denken wir uns (30) substituirt in (28) und setzen die Coefficienten von $X^a Y^b Z^c$ einander gleich, so erhalten wir:

$$(31) \ldots\ldots \quad \frac{1}{C_{abc}} X^a Y^b Z^c = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

$$(32) \ldots\ldots \quad \frac{1}{C_{abc}} U^a V^b W^c = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha v^\beta w^\gamma.$$

Diese Gleichungen geben die Definition sämmtlicher Grössen $A_{\alpha\beta\gamma}$ als Entwickelungscoefficienten eines einzigen Ausdruckes, während vorhin alle Gleichungen (29) oder (30) erforderlich waren, um die Bedeutung dieser Grössen $A_{\alpha\beta\gamma}$ festzustellen, deren Zahl ist $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Setzen wir endlich (29) und (30) in (28), so ergiebt die Gleichstellung der Coefficienten des Productes $X^a Y^b Z^c U^a V^b W^c$ auf beiden Seiten der Gleichung die Relation:

(33) . . . . $\frac{1}{C_{abc}} = \Sigma\, C_{\alpha\beta\gamma}\, A^2_{\alpha\beta\gamma}$.

Dieses Resultat können wir kurz so ausdrücken:

(34) . . . Wenn $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma = m$ und wenn $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ Grössen $A_{\alpha\beta\gamma}$ als Entwickelungscoefficienten in der Gleichung (31), auf Grund der Substitutionen (17) für rechtwinklige Coordinatensysteme, definirt sind, so besteht zwischen diesen Entwickelungscoefficienten die Gleichung (33).

Obwohl wir mit diesem Satze, der in späteren Vorlesungen öftere Anwendung finden wird, unseren Hauptzweck erreicht haben, so fahren wir doch fort in der Entwickelung weiterer Relationen.

Es seien a', b', c' wieder gegebene Zahlen 0, 1, 2 . . . der Art, dass:

$$a' + b' + c' = m.$$

Diese Zahlen können den vorher gegebenen a, b, c selbst gleich sein, nur nicht in derselben Reihenfolge. In dieser Voraussetzung definiren wir $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ Grössen $A'_{\alpha\beta\gamma}$ als Entwickelungscoefficienten nach der Analogie (29) und (30) durch die Gleichungen:

(35) $$u^\alpha v^\beta w^\gamma = \ldots + C_{\alpha\beta\gamma} \cdot A'_{\alpha\beta\gamma}\, U^{a'} V^{b'} W^{c'} + \ldots$$

(36) $$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \ldots + C_{\alpha\beta\gamma}\, A'_{\alpha\beta\gamma}\, X^{a'} Y^{b'} Z^{c'} + \ldots$$

woraus, wie vorhin, die Gleichungen hervorgehen:

(37) . . . . $\frac{1}{C_{a'b'c'}} X^{a'} Y^{b'} Z^{c'} = \Sigma\, A'_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

(38) . . . . $\frac{1}{C_{a'b'c'}} U^{a'} V^{b'} W^{c'} = \Sigma\, A'_{\alpha\beta\gamma}\, u^\alpha v^\beta w^\gamma$.

Substituiren wir nun (29) und (36) in (28) und vergleichen auf beiden Seiten der Gleichung die Coefficienten des Productes $U^a V^b W^c X^{a'} Y^{b'} Z^{c'}$, so erhalten wir:

(39) . . . . $0 = \Sigma\, C_{\alpha\beta\gamma}\, A_{\alpha\beta\gamma}\, A'_{\alpha\beta\gamma}$,

ein Resultat, welches wir, im Anschlusse an (34), kurz so aussprechen:

(40) . . . Wenn $a+b+c=a'+b'+c'=\alpha+\beta+\gamma=m$, wenn ferner $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ Grössen $A_{\alpha\beta\gamma}$ als Entwickelungscoefficienten durch (31) und wenn $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ andere Grössen $A'_{\alpha\beta\gamma}$ als Entwickelungscoefficienten durch (37) definirt werden, so besteht zwischen diesen Entwickelungscoefficienten die Gleichung (39).

Fasst man den speciellen Fall, wenn $m=1$ ist, in das Auge, so wird man leicht erkennen, dass der Satz (34) der Repräsentant ist der drei ersten Gleichungen (16) und dass der Satz (40) die drei anderen Gleichungen des Systemes (16) ausdrückt. Das System Gleichungen (16) enthält aber gerade alle Bedingungen zwischen den 9 Coefficienten in den Transformationsformeln eines rechtwinkligen Coordinatensystemes in ein beliebiges andere rechtwinklige Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte.

Wir beabsichtigen in späteren Vorlesungen nur von dem Satze (34) Gebrauch zu machen und zwar in den Fällen, wenn $m=2$ oder $m=3$ ist. Aus diesem Grunde gehen wir auf die genannten Fälle specieller ein.

Es sei erstens $m=2$ und $a=0$, $b=1$, $c=1$. In dieser Voraussetzung geht die Gleichung (31) über in:

(41) . . . . $YZ=\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma$,

woraus sich auf Grund der Substitutionen (17) folgende Werthe der Entwickelungscoefficienten ergeben:

$$(42)\quad \begin{array}{lll} A_{200}=a'a'', & A_{020}=b'b'', & A_{002}=c'c'', \\ A_{011}=b'c''+b''c', & A_{101}=c'a''+c''a', & A_{110}=a'b''+a''b'. \end{array}$$

Nach dem Satze (34) hat man nun:

(43) . . $1=2(A_{200}^2+A_{020}^2+A_{002}^2)+A_{011}^2+A_{101}^2+A_{110}^2$,

eine Gleichung, welche die Einheit als die Summe von sechs Quadraten in symmetrischer Weise ausdrückt. Legt man jedoch auf die Symmetrie weniger Gewicht, so kann man die Einheit auch durch fünf Quadrate darstellen.

Es ist nämlich nach (16):

$$A_{200} + A_{020} + A_{002} = 0$$

und daher:

$$A_{200}^2 = A_{020}^2 + 2A_{020}A_{002} + A_{002}^2,$$
$$(A_{020} - A_{002})^2 = A_{020}^2 - 2A_{020}A_{002} + A_{002}^2,$$

woraus durch Addition folgt:

$$A_{200}^2 + (A_{020} - A_{002})^2 = 2A_{020}^2 + 2A_{002}^2.$$

Zieht man diese Gleichung von (43) ab, so erhält man:

$$(44)\quad 1 = 3A_{200}^2 + (A_{020} - A_{002})^2 + A_{011}^2 + A_{101}^2 + A_{110}^2.$$

In einem zweiten Falle sei $m = 3$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Alsdann geht die Gleichung (31) über in:

$$(45) \quad \ldots\ldots \quad XYZ = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

und wenn man darin (17) substituirt, so erhält man folgende Werthe der 10 Entwickelungscoefficienten:

$$A_{300} = aa'a'', \quad A_{030} = bb'b'', \quad A_{003} = cc'c'',$$

$$(46) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A_{120} &= ab'b'' + a'b''b + a''bb', \\ A_{102} &= ac'c'' + a'c''c + a''cc', \\ A_{012} &= bc'c'' + b'c''c + b''cc', \\ A_{210} &= ba'a'' + b'a''a + b''aa', \\ A_{201} &= ca'a'' + c'a''a + c''aa', \\ A_{021} &= cb'b'' + c'b''b + c''bb', \end{aligned}$$

$$A_{111} = ab'c'' + ab''c' + a'b''c + a'bc'' + a''bc' + a''b'c.$$

Zwischen ihnen besteht nach dem Satze (34) die Gleichung:

$$(47) \quad \ldots \quad \begin{aligned} 1 = 6\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\} + A_{111}^2 \\ + 2\{A_{120}^2 + A_{102}^2 + A_{012}^2 + A_{210}^2 + A_{201}^2 + A_{021}^2\}, \end{aligned}$$

eine Darstellung der Einheit als die Summe von 10 Quadraten.

Die 10 Quadrate, aus welchen die Gleichung (47) zusammengesetzt ist, lassen sich auf 7 Quadrate zurückführen, wenn man auf Grund von (16) bemerkt, dass:

$$(48) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A_{120} + A_{102} + 3A_{300} &= 0, \\ A_{012} + A_{210} + 3A_{030} &= 0, \\ A_{201} + A_{021} + 3A_{003} &= 0. \end{aligned}$$

Denn man hat nach der ersten von diesen Gleichungen:

$$9A_{300}^2 = A_{120}^2 + 2A_{120}A_{102} + A_{102}^2.$$

Addirt man zu dieser Gleichung folgende:

$$(A_{120} - A_{102})^2 = A_{120}^2 - 2A_{120}A_{102} + A_{102}^2,$$

so erhält man:

$$9A_{300}^2 + (A_{120} - A_{102})^2 = 2(A_{120}^2 + A_{102}^2),$$

und in gleicher Weise:

$$9A_{030}^2 + (A_{012} - A_{210})^2 = 2(A_{012}^2 + A_{210}^2),$$
$$9A_{003}^2 + (A_{201} - A_{021})^2 = 2(A_{201}^2 + A_{021}^2),$$

wodurch die Gleichung (47) übergeht in:

$$(49) \quad \begin{aligned} 1 = 15\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\} + A_{111}^2 \\ + (A_{120} - A_{102})^2 + (A_{012} - A_{210})^2 + (A_{201} - A_{021})^2. \end{aligned}$$

Diese elegante Gleichung (49), freilich auf einem ganz anderen Wege gefunden, ist eine Entdeckung von Jacobi, Crelles Journal für Mathematik Bd. 30, p. 46, der zuerst die 10 Entwickelungscoefficienten (46) in den Calcul eingeführt hat. Derselbe knüpft daran ein Paar wichtige Bemerkungen, die wir hier nicht unterdrücken dürfen.

Wir sind zu Aufstellungen der Gleichungen (29) und (30), aus welchen alle folgenden Gleichungen hervorgingen, von den Substitutionen (23) und (14) ausgegangen. Wenn wir an ihrer Stelle von den Substitutionen (22) und (17) ausgegangen wären, so würden wir analoge Gleichungen erhalten haben, welche aus den Gleichungen (47) und (49) dadurch hervorgehen, dass man nur die Vertauschungen macht:

$$a' \text{ mit } b, \quad a'' \text{ mit } c, \quad b'' \text{ mit } c'.$$

Man kann daher sagen, dass die rechten Theile der Gleichungen (47) und (49) durch diese Vertauschungen ihren Werth nicht ändern.

Der Hinblick auf (46) lehrt, dass durch die genannten Vertauschungen folgender Ausdruck ungeändert bleibt:

$$(50) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A_{111}.$$

Setzt man die Werthe von A_{300}, A_{030}, A_{003} aus (48) in die Gleichungen (47) und (49) und eliminirt nach der Ent-

wickelung die Summe der sechs gleichartigen Quadrate aus beiden Gleichungen, so ersieht man aus der resultirenden Gleichung, dass durch jene Vertauschungen auch folgender Ausdruck seinem Werthe nach ungeändert bleibt:

$$(51) \quad \ldots \quad A_{120}A_{102} + A_{012}A_{210} + A_{201}A_{021}.$$

Bleibt aber dieser Ausdruck ungeändert, so lehrt die durch die Substitutionen (48) veränderte Gleichung (49), dass ebenfalls folgender Ausdruck durch die genannten Vertauschungen seinen Werth beibehält:

$$(52) \quad \ldots \quad A_{120}^2 + A_{102}^2 + A_{012}^2 + A_{210}^2 + A_{201}^2 + A_{021}^2.$$

Hieraus ergiebt sich endlich nach (47), dass durch jene Vertauschungen auch folgender Ausdruck seinen Werth nicht ändert:

$$(53) \quad \ldots\ldots \quad A_{200}^2 + A_{020}^2 + A_{002}^2.$$

Nach diesen allerdings weiten Entwickelungen, deren Nutzen erst bei Gelegenheit der Kreisschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung und der Rotationsoberflächen zu Tage treten wird, nehmen wir die Substitutionen (14) wieder auf. Aus ihnen geht, mit Rücksicht auf (21), wenn man aus je zwei Gleichungen eine der Variabeln X, Y, Z eliminirt, folgendes System von Gleichungen hervor:

$$(54) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned}
cy - bz &= a'Z - a''Y, \\
c'y - b'z &= a''X - aZ, \\
c''y - b''z &= aY - a'X, \\
az - cx &= b'Z - b''Y, \\
a'z - c'x &= b''X - bZ, \\
a''z - c''x &= bY - b'X, \\
bx - ay &= c'Z - c''Y, \\
b'x - a'y &= c''X - cZ, \\
b''x - a''y &= cY - c'X.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste von diesen Gleichungen mit $b'c'X$, die zweite darunter stehende Gleichung mit bcY, und zieht die letztere von der ersten ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} cc'y(b'X - bY) + bb'z(cY - c'X) \\ = a'b'c'ZX + abcYZ - a''XY(bc + b'c'). \end{aligned}$$

Benutzt man zur Umformung des rechten Theiles dieser Gleichung die Gleichungen (18) und des linken Theiles die Gleichungen (54) und (16), so erhält man schliesslich:

$$(55) \quad aa'a''yz + bb'b''zx + cc'c''xy = abcYZ + a'b'c'ZX + a''b''c''XY.$$

Wenn wir, statt von den Substitutionen (14) auszugehen, die Substitutionen (23) nehmen, so werden wir in gleicher Weise erhalten:

$$(56) \quad aa'a''vw + bb'b''wu + cc'c''uv = abcVW + a'b'c'WU + a''b''c''UV.$$

Die beiden eben abgeleiteten Gleichungen (55) und (56) werden durch unsere Substitutionen wieder identische Gleichungen. Die erste von ihnen beweiset den Satz:

Die Coordinatenaxen zweier rechtwinkligen Systeme mit demselben Anfangspunkte liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung.

Denn man erhält die Gleichung des Kegels, auf welchem die sechs Coordinatenaxen liegen, wenn man einen der gleichen Ausdrücke (55) gleich 0 setzt. In ähnlicher Weise geht aus der Gleichung (56) der Satz hervor:

Die Coordinatenebenen zweier rechtwinkliger Systeme mit demselben Anfangspunkte berühren einen Kegel zweiter Ordnung.

Wir schliessen unsere Vorlesung mit zwei Bemerkungen, welche geeignet sind mehr Klarheit über den Zusammenhang der vielen, in dem Vorhergehenden hervorgehobenen, Formeln zu verbreiten:

Es ist erlaubt, in allen aus den Substitutionen (14), (17), (22), (23) für rechtwinklige Coordinatensysteme hervorgegangenen Formeln folgende gleichzeitige Vertauschungen zu machen:

$$(57) \quad \begin{array}{l} „\ x,\ y,\ z;\ X,\ Y,\ Z, \\ „\ u,\ v,\ w;\ U,\ V,\ W. \end{array}$$

Da nämlich durch diese Vertauschungen die genannten Substitutionen nur in einander übergehen, so können die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen durch dieselben Vertauschungen ihre Gültigkeit nicht verlieren.

Es ist erlaubt, in allen aus den Substitutionen (14), (17), (22), (23) für rechtwinklige Coordinatensysteme hervorgegangenen Formeln folgende gleichzeitige Vertauschungen zu machen:

$$(58) \ldots \begin{array}{l} ,, \; x, \; y, \; z; \; u, \; v, \; w; \; a', \; a'', \; b'', \\ ,, \; X, \; Y, \; Z; \; U, \; V, \; W; \; b, \; c, \; c'. \end{array}$$

Denn es gehen auch durch diese Vertauschungen die Substitutionen nur in einander über.

Neunzehnte Vorlesung.

Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen.

Man hat in der sechszehnten Vorlesung gesehen, welche Willkür herrscht in der Bestimmung eines Systemes harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung. Diese Willkür wird einiger Maassen beschränkt, wenn man einen der vier harmonischen Pole mit dem Mittelpunkt der Oberfläche zusammenfallen lässt, wodurch die drei anderen in das Unendliche verlegt werden. Die Verbindungslinien der im Unendlichen liegenden drei Pole mit dem Mittelpunkte der Oberfläche sind conjugirte Durchmesser der Oberfläche. Wenn diese auf einander senkrecht stehen, so hat man die Hauptaxen der Oberfläche.

Dass alle diese Bedingungen für die Hauptaxen sich erfüllen lassen, kann man auf folgende Art einsehen.

Beschreibt man um den Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung, welcher der Einfachheit wegen der Coordinatenanfangspunkt sein soll, eine Kugel mit einem

gegebenen Radius, so hat man, da die Kugeloberfläche auch eine Oberfläche zweiter Ordnung ist, zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung, für welche das beiden gemeinsame System harmonischer Pole nach Vorschrift der sechszehnten Vorlesung bestimmt werden kann. Einer von diesen Polen ist der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Oberflächen. Denn die Coordinaten desselben, als des Coordinatenanfangspunktes, genügen, unter den gemachten Voraussetzungen, den Gleichungen (3) der sechszehnten Vorlesung, welche das beiden Oberflächen gemeinsame System harmonischer Pole bestimmen in der Weise, dass die drei ersten Gleichungen von selber erfüllt werden, während die letzte Gleichung den Werth von λ ergiebt. Die drei anderen Pole liegen in dem Unendlichen, weil jeder derselben harmonischer Pol des Mittelpunktes der Oberfläche oder der Kugel ist. Erwägt man nun, dass die Polarebene der Kugel immer senkrecht steht auf der Verbindungslinie des Poles mit dem Mittelpunkte der Kugel, und dass die Polarebene eines jeden Poles aus einem Systeme harmonischer Pole immer durch die anderen Pole des Systemes geht, so sieht man, dass die Polarebenen jener drei harmonischen Pole im Unendlichen auf einander senkrecht stehen allein aus dem Grunde, weil sie Polarebenen einer Kugel sind. Diese Polarebenen schneiden sich in drei, von dem Mittelpunkte ausgehenden, auf einander senkrecht stehenden, geraden Linien, die den Mittelpunkt mit den drei Polen im Unendlichen verbinden. Sie sind daher die Hauptaxen der gegebenen Oberfläche.

Das Problem der Hauptaxen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung kommt hiernach darauf zurück, das der gegebenen Oberfläche und einer Kugel, mit demselben Mittelpunkte als die Oberfläche, gemeinsame System harmonischer Pole zu bestimmen. Dieses Problem ist in grösserer Allgemeinheit in der sechszehnten Vorlesung behandelt worden. Da man jedoch in dem vorliegenden Falle einen Pol des gemeinsamen Systemes harmonischer Pole kennt, nämlich den gemeinsamen Mittelpunkt beider Oberflächen, so wird die im allgemeinen Falle aufzulösende Gleichung $\Delta = 0$ vom vierten Grade sich in dem vorliegenden Falle auf den dritten Grad reduciren. Es werden überdies noch Specialitäten auftreten,

die eine von dem vorhergehenden unabhängige Behandlung des Problemes wünschenswerth machen.

Nachdem wir auf diese Weise die Existenz der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung aus einem allgemeineren Gesichtspunkte nachgewiesen haben, so wollen wir jetzt untersuchen, welche Form die Gleichung:

$$f(x, y, z, 1) = 0$$

einer Oberfläche zweiter Ordnung haben muss, wenn die Hauptaxen der Oberfläche den Axen des rechtwinkligen Coordinatensystemes, auf welches sich die Gleichung der Oberfläche bezieht, parallel sind.

Der Mittelpunkt der Oberfläche und die auf den drei Coordinatenaxen im Unendlichen liegenden Punkte bilden ein System harmonischer Pole der Oberfläche. Die Gleichungen der Polarebenen der drei letzten Pole sind:

$$f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0.$$

Da diese Ebenen aber den Coordinatenaxen parallel sein müssen, so darf in jeder dieser Gleichungen nur eine von den Variabeln vorkommen. Dieses trifft jedoch nur zu, wenn in der Gleichung der Oberfläche die Producte yz, zx, xy fehlen. Es ist daher das Verschwinden der drei Producte der Variabeln in der Gleichung der Oberfläche die Bedingung, dass das rechtwinklige Coordinatensystem, auf welches sich die Oberfläche bezieht, den Hauptaxen der Oberfläche parallel sei.

Fasst man das Problem der Hauptaxen allgemein auf, um auch die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt mit hereinzuziehen, indem man verlangt, dass irgend ein Coordinatensystem bestimmt werde, dessen Axen den Hauptaxen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung parallel sind, so lässt sich dasselbe rein algebraisch also ausdrücken:

Die Substitutionen zu bestimmen:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, \end{aligned}$$

welche die Gleichungen:

(2) . . . . . $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$

(3) . . . . . $\varphi(x, y, z) = \lambda X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$

zu identischen Gleichuugen machen, wenn:

(4) $\varphi(x,y,z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy.$

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass $\varphi(x, y, z)$ die Summe der Glieder zweiter Ordnung sei in der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z, 1) = 0$, von welcher die Richtungen der Hauptaxen zu bestimmen sind.

Um die Auflösung dieses algebraischen Problemes vorzubereiten, differentiiren wir die identische Gleichung (2) nach den Variabeln X, Y, Z, wodurch wir erhalten:

(5) . . . .
$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

und bringen die aus diesen Gleichungen durch Substitutionen von (1) sich ergebenden Relationen (16) der vorhergehenden Vorlesung wieder in Erinnerung:

(6) . .
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a''a + b''b + c''c &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0. \end{aligned}$$

Die Differentiation der identischen Gleichung (3) nach der Variable X giebt:

$$a\varphi'(x) + b\varphi'(y) + c\varphi'(z) = 2\lambda X,$$

welche Gleichung nach Substitution von (5) sich auch so darstellen lässt:

$$x\varphi'(a) + y\varphi'(b) + z\varphi'(c) = 2\lambda(ax + by + cz).$$

Diese Gleichung, welche unabhängig ist von den Werthen der Variabeln in ihr, zerfällt in folgende drei Gleichungen:

(7) . . . .
$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= 2\lambda a, \\ \varphi'(b) &= 2\lambda b, \\ \varphi'(c) &= 2\lambda c. \end{aligned}$$

Da in diese Gleichungen nur die Verhältnisse $a : b : c$ der zu bestimmenden Substitutions-Coefficienten, welche die Stelle

16*

von zwei Unbekannten vertreten, und die Unbekannte λ eingehen, so werden sich durch dieselben die drei Unbekannten bestimmen lassen. Um die genannten Substitutions-Coefficienten selbst zu bestimmen, wird die erste Gleichung (6) zu Hilfe zu nehmen sein.

Durch Differentiation der identischen Gleichung (3) nach den Variabeln Y oder Z erhält man in gleicher Weise:

$$(8) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \varphi'(a') &= 2\lambda_1 a', \quad & \varphi'(a'') &= 2\lambda_2 a'', \\ \varphi'(b') &= 2\lambda_1 b', \quad & \varphi'(b'') &= 2\lambda_2 b'', \\ \varphi'(c') &= 2\lambda_1 c', \quad & \varphi'(c'') &= 2\lambda_2 c'', \end{aligned}$$

Gleichungen von derselben Form, als die Gleichungen (7), aus welchen mit Zuziehung der zweiten und dritten Gleichung (6) in gleicher Weise die Werthe der Unbekannten des Problemes sich ergeben. Wir werden uns daher begnügen können, aus dem Systeme der Gleichungen (7), welches sich also darstellt:

$$(9) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} (a_{00} - \lambda)a + a_{01}b + a_{02}c &= 0, \\ a_{10}a + (a_{11} - \lambda)b + a_{12}c &= 0, \\ a_{20}a + a_{21}b + (a_{22} - \lambda)c &= 0, \end{aligned}$$

die Werthe der in ihnen enthaltenen Unbekannten zu bestimmen.

Bezeichnet man mit Δ den Ausdruck:

$$(10) \ldots\ldots \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{00} - \lambda)(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) + a_{12}a_{20}a_{01} + a_{21}a_{02}a_{10}$$
$$- (a_{00} - \lambda)a_{12}a_{21} - (a_{11} - \lambda)a_{20}a_{02} - (a_{22} - \lambda)a_{01}a_{10}$$

und eliminirt aus (9) die Unbekannten a, b, c, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten λ die kubische Gleichung:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta = 0.$$

Die Wurzeln der kubischen Gleichung müssen gerade die Werthe der Unbekannten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sein, denn auch die beiden Systeme Gleichungen (8) führen auf dieselbe kubische Gleichung zurück.

Wollte man nach Feststellung der Werthe der Wurzeln

der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$, von welcher das Problem der Hauptaxen abhängt, die Verhältnisse von $a : b : c$ aus zwei von den Gleichungen (9) bestimmen, so würde das zu einem unsymmetrischen Resultate führen. Wir werden deshalb die genannten Verhältnisse aus je zwei von den Gleichungen (9) feststellen, um die Resultate in symmetrischer Weise zu benutzen.

Wir führen zu dem genannten Zwecke die Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
\varDelta_{00} &= \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{00}} = (a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2\,,\\
\varDelta_{11} &= \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{11}} = (a_{22} - \lambda)\,(a_{00} - \lambda) - a_{20}^2\,,\\
\varDelta_{22} &= \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{22}} = (a_{00} - \lambda)\,(a_{11} - \lambda) - a_{01}^2\,,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\varDelta_{12} = \varDelta_{21} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{12}} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{21}}\right) = a_{01}a_{02} - (a_{00} - \lambda)\,a_{12}\,,\\
\varDelta_{20} = \varDelta_{02} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{20}} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{02}}\right) = a_{21}a_{10} - (a_{11} - \lambda)\,a_{20}\,,\\
\varDelta_{01} = \varDelta_{10} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{01}} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{10}}\right) = a_{20}a_{21} - (a_{22} - \lambda)\,a_{01}\,.
\end{aligned}
$$

Alsdann erhalten wir aus (9) in der angedeuteten Weise:

$$
\begin{aligned}
a : b : c &= \varDelta_{00} : \varDelta_{01} : \varDelta_{02}\,,\\
a : b : c &= \varDelta_{10} : \varDelta_{11} : \varDelta_{12}\,,\\
a : b : c &= \varDelta_{20} : \varDelta_{21} : \varDelta_{22}\,.
\end{aligned}
$$

Multipliciren wir die linken Theile dieser Gleichungen respective mit a, b, c, so erhalten wir durch Vergleichung mit ihren rechten Theilen nach Einführung eines zu bestimmenden Multiplicators μ:

$$
\begin{aligned}
\mu a^2 &= \varDelta_{00}\,, & \mu bc &= \varDelta_{12}\,,\\
\mu b^2 &= \varDelta_{11}\,, & \mu ca &= \varDelta_{20}\,,\\
\mu c^2 &= \varDelta_{22}\,, & \mu ab &= \varDelta_{01}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Der Multiplicator wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\mu = \varDelta_{00} + \varDelta_{11} + \varDelta_{22}\,,$$

welche aus der Addition der drei ersten Gleichungen (13) hervorgeht mit Berücksichtigung von (6). Der rechte Theil dieser

Gleichung ist nichts anderes, als der negative, nach λ genommene, Differentialquotient von $\varDelta$. Man hat daher:

$$\mu = -\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda}.$$

Es lässt sich aber dieser Factor μ noch bequemer durch die drei Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ ausdrücken. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Grösse λ in dem Ausdrucke $\varDelta$ als eine variable Grösse, so haben wir unter der Voraussetzung, dass λ_0, λ_1, λ_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung seien, identisch:

$$-\varDelta = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

und daher:

$$-\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1).$$

Setzen wir in dieser Gleichung λ_0 für λ, wodurch die beiden letzten Glieder der Gleichung verschwinden, und hierauf, indem wir zu der ursprünglichen Bedeutung von λ, der Wurzel der kubischen Gleichung, zurückkehren, λ für λ_0, so erhalten wir:

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad \mu = -\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Durch Multiplication zweier von den drei letzten Gleichungen (13) und Division durch die dritte wird:

$$\mu a^2 = \frac{\varDelta_{20} \cdot \varDelta_{01}}{\varDelta_{12}}, \quad \mu b^2 = \frac{\varDelta_{01} \cdot \varDelta_{12}}{\varDelta_{20}}, \quad \mu c^2 = \frac{\varDelta_{12} \cdot \varDelta_{20}}{\varDelta_{01}},$$

woraus sich die gesuchten Werthe der Substitutions-Coefficienten ergeben:

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\varDelta_{20} \cdot \varDelta_{01}}{\mu \cdot \varDelta_{12}}}, \\ b &= \sqrt{\frac{\varDelta_{01} \cdot \varDelta_{12}}{\mu \cdot \varDelta_{20}}}, \\ c &= \sqrt{\frac{\varDelta_{12} \cdot \varDelta_{20}}{\mu \cdot \varDelta_{01}}}. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen dieser Quadrat-Wurzeln sind so zu bestimmen, dass sie dem zweiten Systeme Gleichungen (6) oder dem zweiten Systeme Gleichungen (13) von drei Gleichungen genügen. Genügen die bestimmten Vorzeichen den genannten Gleichungen, so genügen ihnen die entgegengesetzten Vorzeichen auch.

Die Substitutions-Coefficienten a', b', c' oder a'', b'', c'' erhält man aus diesen Ausdrücken (15), wenn man die Wurzeln λ und λ_1 oder λ und λ_2 der kubischen Gleichung mit einander vertauscht.

Eine kubische Gleichung kann entweder drei reelle Wurzeln oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln haben. Hätte die kubische Gleichung $\Delta = 0$, auf welche das Problem der Hauptaxen führt, zwei imaginäre Wurzeln, so würde für die Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen in diesem Falle die geometrische Interpretation der Substitutionen (1) ihre Geltung verlieren. Es ist daher folgender Satz von grosser Bedeutung:

Die kubische Gleichung $\Delta = 0$, von welcher das Problem der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängt, hat nur reelle Wurzeln.

Cauchy giebt folgenden Beweis des angeführten Satzes, der sich in gleicher Weise ausdehnen lässt auf diejenige Gleichung $\Delta = 0$, auf welche unser, auf mehr als drei Variable erweitertes, algebraisches Problem zurückführen würde. Es ist dieses eine Gleichung, von welcher die Berechnung der secularen Störungen der Planeten abhängt.

Wenn die kubische Gleichung $\Delta = 0$ eine Wurzel hätte von der Form: $\lambda = p + qi$, so müsste dieselbe Gleichung auch eine Wurzel haben $\lambda_1 = p - qi$. Demnach würden die Grössen a, b, c und a', b', c' die Form haben:

$$\begin{aligned} a &= P + Qi, & a' &= P - Qi, \\ b &= P_1 + Q_1 i, & b' &= P_1 - Q_1 i, \\ c &= P_2 + Q_2 i, & c' &= P_2 - Q_2 i. \end{aligned}$$

Da aber zwischen den Grössen a, b, c und a', b', c' die Gleichung Statt findet:

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

so hätte man:

$$P^2 + P_1^2 + P_2^2 + Q^2 + Q_1^2 + Q_2^2 = 0,$$

eine Gleichung, welche ausdrücken würde, dass die Summe der Quadrate von reellen Grössen gleich 0 sei, was unmöglich ist.

Das Bedenken, dass unter den Quadratwurzelzeichen der Ausdrücke (15) negative Grössen stehen könnten, wird beseitiget, wenn man erwägt, dass diese Grössen ihrer Zusammensetzung nach dasselbe Vorzeichen haben und dass $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Setzt man in dem Ausdrucke $\varDelta$ in (10) die Grösse λ gleich 0, so geht derselbe in den Ausdruck D (13) der dreizehnten Vorlesung über, dessen Verschwinden die Bedingung ist, dass die Oberfläche zweiter Ordnung, um welche es sich handelt, keinen Mittelpunkt habe. Man kann daher sagen:

Die Bedingung, dass eine Oberfläche zweiter Ordnung keinen Mittelpunkt habe, fällt zusammen mit der Bedingung, dass die kubische Gleichung, von welcher die Hauptaxen der Oberfläche abhängen, eine Wurzel gleich 0 habe.

Wie auch die Gleichung der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung beschaffen sei, im Falle die Oberfläche einen Mittelpunkt hat, wird man sie durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in den Mittelpunkt auf die Form bringen können, in welcher die Glieder der ersten Ordnung fehlen. Durch Veränderung der Richtung der rechtwinkligen Coordinatenaxen kann man sie zurückführen auf die Form:

$$(16) \quad \lambda x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \delta = 0.$$

Hat dagegen die Oberfläche zweiter Ordnung keinen Mittelpunkt, so kann man die Gleichung derselben durch Veränderung der Richtung der rechtwinkligen Coordinatenaxen zurückführen auf die Form:

$$\lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

und durch nachträgliche Veränderung des Coordinatenanfangspunktes auf die Form:

$$(17) \quad \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \alpha x = 0,$$

oder, wenn $\lambda_1 = 0$ ist, auf die Form:

$$(18) \quad \lambda_2 z^2 + \alpha x + \beta y = 0.$$

Nach den Vorzeichen der in diesen Gleichungen enthaltenen Constanten unterscheidet man die verschiedenen Geschlechter der Oberflächen zweiter Ordnung:

Das Ellipsoid:

(19) .... $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Das imaginäre Ellipsoid:

(20) .... $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$

Das Hyperboloid mit einer Mantelfläche:

(21) .... $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Das Hyperboloid mit zwei Mantelflächen:

(22) .... $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Der reelle Kegel:

(23) .... $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Der imaginäre Kegel:

(24) .... $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt unterscheiden sich wie folgt:

Das elliptische Paraboloid:

(25) .... $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \alpha x = 0.$

Das hyperbolische Paraboloid:

(26) .... $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \alpha x = 0.$

Der parabolische Cylinder:

(26)* .... $z^2 + \alpha x + \beta y = 0.$

Zu erwähnen ist noch der Fall, wenn in den Gleichungen (21) und (22) der Coefficient $\frac{1}{c^2}$ verschwindet. In diesem Falle stellen die genannten Gleichungen einen elliptischen Cylinder und einen hyperbolischen Cylinder dar.

Die Namen dieser Oberflächen sind hergenommen von den Kegelschnitten, in welchen die auf den Hauptaxen senkrecht stehenden Ebenen die Oberflächen schneiden. Man muss diese Schnittcurven studiren, um eine Anschauung zu erhalten

von den verschiedenen namentlich aufgeführten Oberflächen zweiter Ordnung.

Man braucht die Gleichungen der Oberflächen zweiter Ordnung nicht auf diese Formen zurückführen, um die verschiedenen Geschlechter zu erkennen. Denn da die kubische Gleichung $\Delta = 0$, von welcher die Hauptaxen der Oberfläche abhängen, nur reelle Wurzeln hat, so giebt die Entwickelung der kubischen Gleichung nach Potenzen der Unbekannten in ihr Aufschluss hierüber.

Haben nämlich alle Glieder der kubischen Gleichung dasselbe Vorzeichen, oder haben die auf einander folgenden Glieder abwechselnde Vorzeichen, so ist die Oberfläche eines der beiden Ellipsoide. Im anderen Falle ist die Oberfläche eines der beiden Hyperboloide. Kommt noch die in der vierzehnten Vorlesung entwickelte Bedingung für den Kegel hinzu, so ist die Oberfläche in dem ersten Falle ein imaginärer Kegel, in dem zweiten Falle ein reeller Kegel. Haben die auf einander folgenden Glieder der quadratischen Gleichung, auf welche die kubische Gleichung $\Delta = 0$ im Falle der Oberfläche ohne Mittelpunkt zurückführt, gleiche oder abwechselnde Vorzeichen, so ist die Oberfläche ein elliptisches Paraboloid, in jedem anderen Falle ein hyperbolisches Paraboloid. Für den parabolischen Cylinder reducirt sich die kubische Gleichung $\Delta = 0$ auf eine Gleichung des ersten Grades, indem zwei Wurzeln derselben verschwinden.

So einfach auch die in (15) angegebenen Werthe der Substitutions-Coefficienten a, b, c sind, so nehmen sie doch eine wenig übersichtliche Gestalt an, wenn man die Werthe (12) und (14) substituirt. Wir führen deshalb statt der 6 Constanten in der Function $\varphi(x, y, z)$ 6 neue Constanten ein, indem wir setzen:

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{a_{01}\, a_{02}}{a_{12}} &= \beta_0^2, \quad \beta_0^2 - a_{00} = \alpha_0 \,, \\ \frac{a_{12}\, a_{10}}{a_{20}} &= \beta_1^2, \quad \beta_1^2 - a_{11} = \alpha_1 \,, \\ \frac{a_{20}\, a_{21}}{a_{01}} &= \beta_2^2, \quad \beta_2^2 - a_{22} = \alpha_2 \,, \end{aligned}$$

Die drei ersten Ausdrücke können wir in der That gleich Quadraten setzen, weil dieselben ihrer Zusammensetzung nach

dasselbe Vorzeichen haben. Hätten sie sämmtlich das negative Vorzeichen, so müsste man in der Gleichung der Oberfläche alle Glieder mit — 1 multipliciren, um sie positiv zu machen.

Durch Einführung dieser neuen Constanten in (15) nehmen jene Ausdrücke die einfachere Gestalt an:

$$(28) \quad a = \frac{\beta_0 B}{\alpha_0 + \lambda}, \quad b = \frac{\beta_1 B}{\alpha_1 + \lambda}, \quad c = \frac{\beta_2 B}{\alpha_2 + \lambda},$$

wenn man setzt:

$$(29) \quad B = \sqrt{\frac{(\alpha_0 + \lambda)(\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}}.$$

Einen noch grösseren Vortheil erlangt man durch Einführung der sechs neuen Constanten in die kubische Gleichung $\Delta = 0$, welche dadurch folgende einfache Gestalt gewinnt:

$$(30) \quad \frac{\Delta}{(\alpha_0 + \lambda)(\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)} = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda} - 1 = 0.$$

Denn beachtet man den Wechsel des Vorzeichens des linken Theiles der Gleichung, wenn man λ von $+\infty$ bis $-\infty$ abnehmen lässt, indem man voraussetzt, dass:

$$(31) \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2,$$

so sieht man, dass die Wurzeln der kubischen Gleichung zwischen den Grenzen liegen:

(32) die grösste Wurzel λ zwischen $+\infty$ und $-\alpha_2$,
die mittlere Wurzel λ_1 zwischen $-\alpha_2$ und $-\alpha_1$,
die kleinste Wurzel λ_2 zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_0$.

Diese Feststellung der Grenzen von Jacobi, innerhalb welcher die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ zu suchen sind, macht nicht allein den von Cauchy angegebenen Beweis der Realität der Wurzeln überflüssig, sondern ermöglichet auch ein tieferes Eingehen in einen Ausnahmefall, den wir bisher ganz unberücksichtiget gelassen haben. Wir haben den Fall im Auge, wenn zwei Wurzeln λ und λ_1 der kubischen Gleichung einander gleich sind.

In diesem Falle wird der Ausdruck (29) für B unendlich gross, und mit ihm auch die Ausdrücke (28), welche aus der Auflösung der linearen Gleichungen (9) hervorgegangen sind.

Ein solch unerwartetes Unendlichwerden der Werthe von Unbekannten in einem besonderen Falle pflegt ein Zeichen zu sein, dass die Werthe der Unbekannten aus Gleichungen berechnet worden sind, welche in dem besonderen Falle nicht unabhängig von einander sind, und sich daher zur Berechnung der Unbekannten nicht eignen. Wir werden in dem vorliegenden Falle diesem Umstande näher nachzuforschen haben.

Wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung λ und λ_1 einander gleich sind, so kann, wie aus der Bestimmung (32) der Grenzen der Wurzeln ersichtlich ist, die gleiche Wurzel nur den Werth haben $-\alpha_2$. Dieser Werth der Wurzel, in die kubische Gleichung (30) gesetzt, giebt:

$$\beta_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_0 - \alpha_2) = 0.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf (31):

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

Bemerkt man ferner, dass der in (30) dargestellte Ausdruck für Δ zwei gleiche Factoren $\lambda + \alpha_2$ haben muss, so sieht man, dass auch:

$$\alpha_1 = \alpha_0.$$

Die kubische Gleichung $\Delta = 0$ hat daher nur unter der Bedingung zwei gleiche Wurzeln, dass:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2,$$

und die gleiche Wurzel ist:

$$(33) \quad \ldots \quad \lambda = \lambda_1 = -\alpha_0 = -\alpha_1 = -\alpha_2.$$

Denn wenn die zwei kleinsten Wurzeln der kubischen Gleichung einander gleich sind, so kommt man mit Vertauschung der Wurzeln in gleicher Weise zu demselben Resultat.

Setzt man nun, um für den Fall zweier gleichen Wurzeln eine Einsicht zu gewinnen in die Natur der Gleichungen (9), aus welchen die Werthe der Substitutions-Coefficienten a, b, c in (28) hervorgegangen sind, in die drei Gleichungen (9) der Reihe nach für λ die gleichen Werthe:

$$-\alpha_0, \quad -\alpha_1, \quad -\alpha_2,$$

so sieht man aus ihnen, mit Berücksichtigung der drei letzten Gleichungen (27), folgende drei Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{aligned}\beta_0^2 a + a_{01} b + a_{02} c = 0,\\ a_{10} a + \beta_1^2 b + a_{12} c = 0,\\ a_{20} a + a_{21} b + \beta_2^2 c = 0.\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen kommen aber durch Substitution der Werthe von β_0^2, β_1^2, β_2^2 aus (27) zurück auf die eine Gleichung:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{a}{a_{12}} + \frac{b}{a_{20}} + \frac{c}{a_{01}} = 0.$$

Ebenso reduciren sich in dem vorliegenden Falle die drei ersten Gleichungen (8) auf die eine Gleichung:

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{a'}{a_{12}} + \frac{b'}{a_{20}} + \frac{c'}{a_{01}} = 0.$$

Die drei letzten Gleichungen (8) dagegen, welche der dritten ungleichen Wurzel λ_2 entsprechen, lassen sich auf die im allgemeinen Falle angegebene Weise behandeln. Aus ihnen ergeben sich schliesslich die Werthe der Substitutions-Coefficienten a'', b'', c'', die man aus (28) durch Vertauschung von λ mit λ_2 erhält, in der Form:

$$(36) \quad \ldots \quad \begin{aligned} a'' = \mu\beta_0, \quad b'' = \mu\beta_1, \quad c'' = \mu\beta_2\\ a'' = \frac{\nu}{a_{12}}, \quad b'' = \frac{\nu}{a_{20}}, \quad c'' = \frac{\nu}{a_{01}}.\end{aligned}$$

Wenn wir nun auch in dem Falle ungleicher Wurzeln der kubischen Gleichung die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten $a:b:c$ aus je zwei Gleichungen (7) und die Verhältnisse von $a':b':c'$ aus je zwei Gleichungen des ersten Systemes (8) berechnen konnten, so hört diese Berechnung doch auf in dem Falle, dass $\lambda = \lambda_1$, in welchem das System Gleichungen (7) sich auf die eine Gleichung (34), und das erste System Gleichungen (8) sich auf die eine Gleichung (35) reducirt. Die Formeln (28), in welchen diese Berechnung in dem vorliegenden Falle erzwungen ist, müssen deshalb illusorisch werden.

Wenn $\lambda = \lambda_1$, so hat man zur Bestimmung der 6 Substitutions-Coefficienten a, b, c und a', b', c' nur 5 Gleichungen,

nämlich die Gleichungen (34) und (35) in Verbindung mit den drei Gleichungen:

$$
(37) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ aa' + bb' + cc' &= 0, \end{aligned}
$$

welchen 5 Gleichungen man auf unendlich viele Arten genügen kann. Die Substitutions-Coefficienten a'', b'', c'' sind bestimmt durch die Gleichungen (36) in Verbindung mit der Gleichung:

$$
(38) \ldots\ldots \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.
$$

Bei dieser Bestimmung geht aber die Function $\varphi(x, y, z)$ durch die Substitutionen (1) über in:

$$
\varphi(x, y, z) = \lambda X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2,
$$

und die Oberfläche zweiter Ordnung, um welche es sich handelt, ist eine Rotations-Oberfläche. Denn führt man die Gleichung der Oberfläche durch Verlegung des rechtwinkligen Coordinatensystemes auf eine der unter (19) bis (26)* angegebenen Formen zurück, so sieht man, dass jede Ebene, welche senkrecht steht auf der, der ungleichen Wurzel entsprechenden, Coordinatenaxe, die Oberfläche in einem Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt in dieser Coordinatenaxe liegt.

Es ist hiernach die Bedingung, dass eine durch ihre Gleichung in rechtwinkligen Punktcoordinaten gegebene Oberfläche zweiter Ordnung eine Rotations-Oberfläche sei, folgende:

$$
(39) \ldots\ldots \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2.
$$

Wenn die kubische Gleichung $\Delta = 0$ drei gleiche Wurzeln haben soll, so muss erstens die Bedingung (39) erfüllt werden, und da sich der durch (30) gegebene Ausdruck von Δ in drei gleiche Factoren zerlegen lassen muss, so folgt daraus noch die Bedingungsgleichung:

$$
\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 0,
$$

welche in die drei Gleichungen zerfällt:

$$
\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0,
$$

oder, wenn man vermittelst (27) auf die ursprünglichen Constanten der Function $\varphi(x, y, z)$ zurückgeht:

$$
(40) \ldots\ldots \quad a_{12} = a_{20} = a_{01} = 0.
$$

Diese Gleichungen drücken aus, dass die Function $\varphi(x,y,z)$ schon die Form habe, auf welche sie in dem allgemeinen Falle zurückzuführen ist.

Die Gleichungen (39) und (40) sind die Bedingungen für die Kugel.

Wenn man schliesslich an Stelle der 6 Constanten in die Function $\varphi(x, y, z)$ die neuen Constanten durch (27) einführt, so stellt sich dieselbe also dar:

$$\varphi(x, y, z) = (\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2). \tag{41}$$

Hätte man diese Form der Function $\varphi(x, y, z)$ statt der Form (4) gleich am Anfange gewählt, so würde man mit überraschender Einfachheit die Lösung des Problemes gefunden haben. Diese Lösung des Problemes der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung werden wir mit grösserer Ausführlichkeit in der zweiundzwanzigsten Vorlesung wieder aufnehmen, nachdem wir zuvor als Einleitung dazu das leichtere Problem der Hauptaxen der Curven zweiter Ordnung in analoger Weise behandelt haben werden.

Es sei noch erwähnt, dass das behandelte algebraische Problem sich als Maximums- oder Minimums-Aufgabe auffassen lässt:

Die Werthe der Variabeln zu bestimmen, welche eine gegebene homogene Function $\varphi(x, y, z)$ zu einem Maximum oder zu einem Minimum machen, wenn zwischen den Variabeln die Bedingungs-Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ statt findet.

Denn, wenn man nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung die, die Werthe der Variabeln bestimmenden, Gleichungen aufstellt, so wird man finden, dass sie auf die behandelten Gleichungen hinauskommen.

Zwanzigste Vorlesung.

Transformation homogener Functionen zweiter Ordnung durch lineare homogene Substitutionen.

Geometrische Probleme haben in den letzten Vorlesungen auf ein und dasselbe algebraische Problem geführt, der Transformation homogener Functionen der zweiten Ordnung durch lineare Substitutionen in die Summe der Quadrate der neuen Variabeln. Wir werden gegenwärtig das algebraische Problem wieder aufnehmen, indem wir die Zahl der Variabeln unbeschränkt lassen.

In dieser Absicht werden wir damit beginnen, Relationen zu entwickeln, welche zwischen den Coefficienten linearer Substitutionen und den Coefficienten in ihren Auflösungen auftreten. Wir werden zweitens auf Eigenschaften linearer Substitutionen aufmerksam machen, welche eine gegebene homogene Function der zweiten Ordnung transformiren in einen Ausdruck, der nur die Quadrate der neuen Variabeln enthält. Wir werden drittens die linearen Substitutionen bestimmen, welche zwei gegebene homogene Functionen der zweiten Ordnung auf die Quadrate der neuen Variabeln zurückführen.

Es stelle:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad X_\varkappa = a_0^\varkappa x_0 + a_1^\varkappa x_1 + \ldots\ldots a_n^\varkappa x_n$$

ein System von $(n+1)$ linearen Gleichungen vor, indem $\varkappa$ die Werthe habe $0, 1, \ldots n$. Durch Auflösung dieses Systemes Gleichungen nach den $(n+1)$ Variabeln x erhält man, wie man in (17) und (21) der siebenten Vorlesung gesehen hat, Gleichungen von derselben Form rücksichtlich der Variabeln X:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad x_\varkappa = e_\varkappa^0 X_0 + e_\varkappa^1 X_1 + \ldots\ldots e_\varkappa^n X_n.$$

Mit diesen linearen Substitutionen bringen wir in Verbindung ein zweites System linearer Substitutionen von der Form:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad Y_\varkappa = c_0^\varkappa y_0 + c_1^\varkappa y_1 + \ldots\ldots c_n^\varkappa y_n,$$

aus welchen nach (22) und (18) der siebenten Vorlesung folgende Auflösungen hervorgehen:

$$(4) \quad \dots \quad y_\varkappa = a_\varkappa^0\, Y_0 + a_\varkappa^1\, Y_1 + \dots \dots a_\varkappa^n\, Y_n.$$

Zwischen den Coefficienten a und e in diesen Substitutionen müssen, weil die einen die anderen bedingen, mannichfaltige Relationen Statt finden. Von diesen Relationen werden wir die gebräuchlichsten entwickeln.

Setzt man die Ausdrücke (1) in (2) und (4) in (3) und vergleicht die Coefficienten gleicher Variabeln, so erhält man:

$$(5) \quad \dots \dots \quad \begin{aligned} 0 &= e_\varkappa^0\, a_\lambda^0 + e_\varkappa^1\, a_\lambda^1 + \dots \dots e_\varkappa^n\, a_\lambda^n, \\ 1 &= e_\varkappa^0\, a_\varkappa^0 + e_\varkappa^1\, a_\varkappa^1 + \dots \dots e_\varkappa^n\, a_\varkappa^n, \\ 0 &= e_0^\varkappa\, a_0^\lambda + e_1^\varkappa\, a_1^\lambda + \dots \dots e_n^\varkappa\, a_n^\lambda, \\ 1 &= e_0^\varkappa\, a_0^\varkappa + e_1^\varkappa\, a_1^\varkappa + \dots \dots e_n^\varkappa\, a_n^\varkappa. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die beiden Determinanten:

$$(6) \quad A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \dots & a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n, & a_1^n, & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \qquad E = \begin{vmatrix} e_0^0, & e_1^0, & \dots & e_n^0 \\ e_0^1, & e_1^1, & \dots & e_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_0^n, & e_1^n, & \dots & e_n^n \end{vmatrix}$$

mit einander und stellt das Product nach (31) der siebenten Vorlesung als eine Determinante dar, so erhält man mit Rücksicht auf (5):

$$AE = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

eine Determinante, welche mit Rücksicht auf (14) der siebenten Vorlesung sich auf die Einheit reducirt, so dass man hat:

$$(7) \quad \dots \dots \dots \dots \quad AE = 1.$$

Man hat ferner die Gleichung:

$$(8) \quad X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + \dots X_n Y_n = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots x_n y_n,$$

welche durch die Substitutionen (1) und (3) oder (2) und (4) eine identische wird. Denn macht man die genannten Sub-

stitutionen und vergleicht beide Seiten der Gleichung mit einander, so erhält man die Gleichungen (5).

Diese Gleichung (8) bleibt auch eine durch die Substitutionen identische, wenn man sowohl ihre linke, als ihre rechte Seite zur $m$ten Potenz erhebt. Hierdurch erhält man mit Anwendung des polynomischen Lehrsatzes:

$$\Sigma \frac{\Pi(m)}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}} (X_0 Y_0)^{\alpha_0} (X_1 Y_1)^{\alpha_1} \ldots (X_n Y_n)^{\alpha_n}$$
$$= \Sigma \frac{\Pi(m)}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}} (x_0 y_0)^{\alpha_0} (x_1 y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n y_n)^{\alpha_n},$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(9) \ldots \quad \begin{aligned} \Pi(m) &= 1 \,.\, 2 \ldots . m \\ C_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} &= \Pi(\alpha_0)\, \Pi(\alpha_1) \ldots . \Pi(\alpha_n) \end{aligned}$$

und annimmt, dass $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ alle gleichen und ungleichen Zahlen $0, 1, 2 \ldots m$ bedeuten, deren Summe ist:

$$(10) \ldots \ldots \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots . \alpha_n = m.$$

Mit Unterdrückung des Factors $\Pi(m)$ in jedem Gliede der genannten Gleichung und Aenderung der Factorenfolge lässt sich dieselbe bequemer so darstellen:

$$(11) \ldots \quad \begin{aligned} &\Sigma \frac{1}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}} X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \,.\, Y_0^{\alpha_0} Y_1^{\alpha_1} \ldots Y_n^{\alpha_n} \\ = &\Sigma \frac{1}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \,.\, y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \ldots . y_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

In der Entwickelung des Productes:

$$y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}$$

nach den Variabeln Y werden wir, indem wir annehmen, dass $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n$ gegebene Zahlen seien aus der Reihe $0\ 1 \ldots n$, deren Summe ebenfalls gleich m ist, den Coefficienten des Productes:

$$Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1} \ldots Y_n^{\beta_n}$$

bezeichnen mit:

$$C_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \,.\, A_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Ebenso werden wir in der Entwickelung des Productes:

$$x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

nach den Variabeln X den Coefficienten des Productes:

$$X_0^{\beta_0} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}$$

bezeichnen mit:

$$C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot E_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n},$$

wodurch die Grössen $A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ als Functionen der Substitutionscoefficienten a und die Grössen $E_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ als gleichartige Functionen der Substitutionscoefficienten e definirt sind.

Denkt man sich nun die Gleichung (11) nach Potenzen und Producten der Variabeln Y entwickelt, so wird der Coefficient des Productes $Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1} \dots Y_n^{\beta_n}$ in dem linken Theile der Gleichung sein:

$$\frac{X_0^{\beta_0} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}}{C_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}}.$$

Um den entsprechenden Coefficienten in dem rechten Theile der Gleichung (11) zu erhalten, wird man in derselben für das Product $y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$ nur zu setzen haben $C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ $A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$, wodurch man erhält:

$$\Sigma\, A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Da aber die genannten beiden Coefficienten in der Gleichung (11) einander gleich sein müssen, so hat man:

$$(12) \dots \quad \frac{X_0^{\beta_0} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}}{C_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}} = \Sigma\, A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

In gleicher Weise erhält man aus (11) durch Entwickelung nach den Variabeln X:

$$(13) \dots \quad \frac{Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1} \dots Y_n^{\beta_n}}{C_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}} = \Sigma\, E_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}.$$

Man kann hiernach die vorausgeschickte Definition der Grössen A und E aufgeben und sie als Entwickelungscoefficienten in den Gleichungen (12) und (13) definiren, wobei es sich wieder herausstellt, dass die einen aus den anderen hervorgehen durch die Vertauschung der Buchstaben a und e.

Behält man aber die erste Definition der Grössen A und E bei, entwickelt die Gleichung (12) nach Potenzen und Producten der Variabeln X und setzt in der Entwickelung die

Coefficienten des Productes $X_0^{\beta_0} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man:

$$(14) \; . \; . \; . \quad \frac{1}{C_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}} = \Sigma \, C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot E_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n},$$

welche Gleichung man auch erhalten haben würde, wenn man die Gleichung (11) nach den Variabeln X und Y entwickelt und die Coefficienten des Productes $X_0^{\beta_0} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n} . Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1} \dots Y_n^{\beta_n}$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich gesetzt hätte.

Dieses Resultat drücken wir kurz so aus:

(15) . . . Wenn die ganz willkürlich gebildeten Substitutionen (1) den Ausdruck:

$$\frac{X_0^{\beta_0} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}}{C_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}}$$

transformiren in (12), und wenn die von (1) abhängigen Substitutionen (3) den Ausdruck:

$$\frac{Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1} \dots Y_n^{\beta_n}}{C_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}}$$

transformiren in (13), so findet unter der Bezeichnung (9) zwischen den Entwickelungscoefficienten A und E die Gleichung (14) Statt.

Wenn die Substitutionscoefficienten a den ihnen entsprechenden Substitutionscoefficienten e gleich werden, und es giebt solche Substitutionen, wie wir im nächsten Abschnitte unserer Vorlesung zeigen werden, so werden auch die Entwickelungscoefficienten A und E einander gleich, und die Gleichung (14) geht dann über in:

$$(16) \; . \; . \; . \quad \frac{1}{C_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}} = \Sigma \, C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot A^2_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Es ist diese Gleichung (16) offenbar eine Erweiterung der Gleichung (33) in der achtzehnten Vorlesung und darum die Gleichung (14) auch. In speciellen Fällen tritt dieses noch auffallender hervor.

Setzt man nämlich $n = 2$, $m = 2$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, so erhält man durch Entwickelung von (12):

(17) $A_{200} = a_0{}^1 a_0{}^2, \quad A_{020} = a_1{}^1 a_1{}^2, \qquad A_{002} = a_2{}^1 a_2{}^2,$
$A_{011} = a_1{}^1 a_2{}^2 + a_2{}^1 a_1{}^2, \; A_{101} = a_2{}^1 a_0{}^2 + a_0{}^1 a_2{}^2, \; A_{110} = a_0{}^1 a_1{}^2 + a_1{}^1 a_0{}^2,$
woraus die entsprechenden Grössen E hervorgehen, wenn man den Buchstaben a in e verwandelt. Auf Grund von (14) hat man nun die mit (43) in der achtzehnten Vorlesung correspondirende Gleichung:

$$(18) \ldots \quad 1 = 2(A_{200}E_{200} + A_{020}E_{020} + A_{002}E_{002}) + A_{011}E_{011} + A_{101}E_{101} + A_{110}E_{110}.$$

Setzen wir $n = 2$, $m = 3$ und $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, so erhalten wir aus der Gleichung (12):

$$A_{300} = a_0{}^0 a_0{}^1 a_0{}^2, \quad A_{030} = a_1{}^0 a_1{}^1 a_1{}^2, \quad A_{003} = a_2{}^0 a_2{}^1 a_2{}^2,$$

$$(19) \quad \begin{aligned} A_{120} &= a_0{}^0 a_1{}^1 a_1{}^2 + a_0{}^1 a_1{}^2 a_1{}^0 + a_0{}^2 a_1{}^0 a_1{}^1, \\ A_{102} &= a_0{}^0 a_2{}^1 a_2{}^2 + a_0{}^1 a_2{}^2 a_2{}^0 + a_0{}^2 a_2{}^0 a_2{}^1, \\ A_{012} &= a_1{}^0 a_2{}^1 a_2{}^2 + a_1{}^1 a_2{}^2 a_2{}^0 + a_1{}^2 a_2{}^0 a_2{}^1, \\ A_{210} &= a_1{}^0 a_0{}^1 a_0{}^2 + a_1{}^1 a_0{}^2 a_0{}^0 + a_1{}^2 a_0{}^0 a_0{}^1, \\ A_{201} &= a_2{}^0 a_0{}^1 a_0{}^2 + a_2{}^1 a_0{}^2 a_0{}^0 + a_2{}^2 a_0{}^0 a_0{}^1, \\ A_{021} &= a_2{}^0 a_1{}^1 a_1{}^2 + a_2{}^1 a_1{}^2 a_1{}^0 + a_2{}^2 a_1{}^0 a_1{}^1, \end{aligned}$$

$$A_{111} = a_0{}^0 a_1{}^1 a_2{}^2 + a_0{}^0 a_1{}^2 a_2{}^1 + a_0{}^1 a_1{}^2 a_2{}^0 + a_0{}^1 a_1{}^0 a_2{}^2 + a_0{}^2 a_1{}^0 a_2{}^1 + a_0{}^2 a_1{}^1 a_2{}^0,$$

woraus wieder die entsprechenden Grössen E hervorgehen, wenn man den Buchstaben a in e verwandelt, und die Gleichung (14) geht über in die mit (47) der achtzehnten Vorlesung correspondirende Gleichung:

$$(20) \ldots \quad \begin{aligned} 1 = 6\{A_{300}E_{300} + A_{030}E_{030} + A_{003}E_{003}\} + A_{111}E_{111} \\ + 2\begin{Bmatrix} A_{120}E_{120} + A_{102}E_{102} + A_{012}E_{012} \\ A_{210}E_{210} + A_{201}E_{201} + A_{021}E_{021} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Man wird bereits bemerkt haben, dass dieser erste Theil der gegenwärtigen Vorlesung nichts weiter bezweckt, als eine Ausdehnung der in der achtzehnten Vorlesung vorgetragenen Formeln und Lehrsätze. Es bleibt darum noch übrig, eine Gleichung oder einen Satz zu entwickeln, welche als Verallgemeinerung der Gleichung (39) oder des Satzes (40) in jener Vorlesung zu betrachten sind. Da wir jedoch von dieser Entwickelung keinen weiteren Gebrauch machen werden, so

wollen wir uns damit begnügen, den Weg anzugeben, auf dem man das Verlangte erreicht.

Nimmt man zu diesem Zwecke an, dass b_0, $b_1 \ldots b_n$ gegebene Zahlen seien aus der Reihe $0, 1 \ldots n$, deren Summe gleich m, wie die Zahlen β_0, $\beta_1 \ldots \beta_n$, jedoch irgend verschieden von den letzteren, entwickelt die Gleichung (12) nach Potenzen und Producten der Variabeln X und setzt in der Entwickelung die Coefficienten des Productes $X_0^{b_0} X_1^{b_1} \ldots X_n^{b_n}$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so wird der Coefficient in dem linken Theile der Gleichung gleich 0 und man erhält dadurch die Erweiterung der Gleichung (39) aus der achtzehnten Vorlesung für beliebige lineare Substitutionen. Eine ähnliche Gleichung würde man aus (13) erhalten, wenn man diese Gleichung nach Potenzen und Producten der Variabeln Y entwickelte und die Coefficienten des Productes $Y_0^{b_0} Y_1^{b_1} \ldots Y_n^{b_n}$ auf beiden Seiten der Gleichung gleichsetzte.

Ein besonderes Gewicht legen wir nur auf den Satz (15), von dem wir noch in dieser Vorlesung Gebrauch machen werden und auf dessen Specialisirung in (34) der achtzehnten Vorlesung, auf welche wir bei Gelegenheit der Rotationsflächen zweiter Ordnung und der Kreisschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung zurückkommen werden.

Die Substitutionen (1) waren bisher ganz willkürliche, denn die Substitutionscoefficienten a konnten irgend welche Werthe haben. Die Substitutionscoefficienten e in den aufgelösten Gleichungen (2) waren durch sie bestimmt. Man kann aber auch die Substitutionscoefficienten e in (2) als die willkürlichen betrachten und die Substitutionscoefficienten a als bestimmte Functionen der ersteren.

Diese Willkürlichkeit werden wir fortan beschränken, indem wir festsetzen, dass die Substitutionen (2) eine beliebig gegebene homogene Function $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ der zweiten Ordnung transformiren in die Form:

$$(21) \quad f(x_0, x_1, \ldots . x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots . \mu_n X_n^2.$$

Dass die $(n+1)^2$ Substitutionscoefficienten e sich wirklich so bestimmen lassen, dass durch Einsetzung der Werthe von $x_0, x_1, \ldots x_n$ aus (2) die Gleichung (21) eine identische wird, ist leicht ersichtlich. Denn setzt man nach der Substitution die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man nur $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den $(n+1)$ $(n+2)$ unbekannten Grössen e und μ, wodurch diese Grössen nicht bestimmt sind. Man kann daher unendlich viele Substitutionen (2) bilden, welche der gemachten Forderung genügen, selbst wenn man die $(n+1)$ Grössen μ als gegebene betrachtet.

Dieselben $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Bedingungsgleichungen in einer anderen Form erhält man auch, wenn man die Substitutionen (1) in (21) macht und die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt. Denn in diesem Falle wird die Gleichung (21) eine identische in Rücksicht auf die Variabeln x, wie dieselbe Gleichung durch die Substitutionen (2) eine identische Gleichung wurde in Rücksicht auf die Variabeln X.

Denkt man sich nun diese Gleichung (21) durch die Substitutionen (1) zu einer identischen gemacht und differentiirt nach $x_\varkappa$, so erhält man:

$$(22) \qquad \tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) = a_\varkappa{}^0 \mu_0 X_0 + a_\varkappa{}^1 \mu_1 X_1 + \ldots . a_\varkappa{}^n \mu_n X_n,$$

eine Gleichung, welche, da $\varkappa$ die Werthe hat $0, 1, 2 \ldots n$, ein ganzes System von $(n+1)$ Gleichungen repräsentirt.

Diese Gleichungen sind als eine Folge der Substitutionen (1) oder (2) zu betrachten, welche die Eigenschaft haben, die Transformation (21) zu vollführen, und umgekehrt sind auch die Gleichungen (1) oder (2) eine Folge dieser Gleichungen. An Stelle der Relationen (1) oder (2) zwischen den Variabeln x und X, welche die Gleichung (21) zu einer identischen machen, kann man daher auch die Gleichungen (22) nehmen.

Die Gleichungen (22) gehen über in (4), wenn man die Vertauschungen macht:

$$\tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) \text{ mit } y_\varkappa \text{ und } \mu_\varkappa X_\varkappa \text{ mit } Y_\varkappa,$$

und die Substitutionen (4) gehen dadurch über in (22). Da aber die Gleichungen (22) nichts anderes sind, als die umgestalteten Substitutionen (1), so kann man sagen, dass durch die angegebenen Vertauschungen die Substitutionen (1) und (4), also auch (2) und (3) in einander übergehen.

Alle bisher aufgestellten Gleichungen sind unmittelbare Folgen aus den Substitutionen. Man wird daher in allen jenen Gleichungen die angegebenen Vertauschungen machen können; sie müssen jedoch gleichzeitig erfolgen.

Die erste von diesen Vertauschungen besteht darin, dass man setzt:

$$\tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) = y_\varkappa.$$

Löset man das durch diese Gleichung repräsentirte System Gleichungen auf, so erhält man nach (28) der siebenten Vorlesung, indem die Unbekannte $2x_\varkappa$ sich als der Differentialquotient einer bestimmten homogenen Function $F(y_0, y_1, \dots y_n)$ der zweiten Ordnung der reciproken Function von $f(x_0, x_1, \dots x_n)$, darstellt, Gleichungen von der Form:

$$x_\varkappa = \tfrac{1}{2}F'(y_\varkappa).$$

Es ist hiernach gleichbedeutend, ob man setzt:

$$\tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) = y_\varkappa \text{ oder } x_\varkappa = \tfrac{1}{2}F'(y_\varkappa).$$

Wir können daher sagen, dass es erlaubt sei, in allen unseren Gleichungen folgende Vertauschungen zu machen:

$$(23)\quad \tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) = y_\varkappa \text{ oder } \tfrac{1}{2}F'(y_\varkappa) = x_\varkappa, \text{ und } \mu_\varkappa X_\varkappa = Y_\varkappa.$$

Macht man diese Vertauschungen in der so dargestellten Gleichung (21):

$$x_0\tfrac{1}{2}f'(x_0) + x_1\tfrac{1}{2}f'(x_1) + \dots x_n\tfrac{1}{2}f'(x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \dots \mu_n X_n^2,$$

so erhält man:

$$(24)\ \dots\quad F(y_0, y_1, \dots y_n) = \frac{Y_0^2}{\mu_0} + \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \dots \frac{Y_n^2}{\mu_n}.$$

Dieses Resultat geben wir als einen Lehrsatz wieder, wie folgt:

(25) . . . . Wenn die Substitutionen (1) und (2) die homogene Function $f(x_0, x_1, \dots x_n)$ der zweiten Ordnung transformiren in:

$$f(x_0, x_1, \dots x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \dots \mu_n X_n^2,$$

so transformiren die Substitutionen (3) und (4) die reciproke Function $F(y_0, y_1, \dots y_n)$ in:

$$F(y_0, y_1, \dots y_n) = \frac{Y_0^2}{\mu_0} + \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \dots \frac{Y_n^2}{\mu_n}.$$

Eine ganz besondere Beachtung verdient der Fall, wenn die gegebene Function ist: $f(x_0, x_1, \dots x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2$ und zugleich $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = 1$. Denn unter dieser Voraussetzung nimmt die Gleichung (22) die Gestalt an:

$$x_\varkappa = a_\varkappa^0 X_0 + a_\varkappa^1 X_1 + \dots a_\varkappa^n X_n.$$

Vergleicht man letztere mit den Substitutionen (2), so sieht man, dass:

$$e_\varkappa^\lambda = a_\varkappa^\lambda.$$

Diese Bemerkung drücken wir als Satz aus:

(26) . . . Wenn die Substitutionen:

$$x_\varkappa = a_\varkappa^0 X_0 + a_\varkappa^1 X_1 + \dots a_\varkappa^n X_n$$

die Function $x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2$ transformiren in:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2 = X_0^2 + X_1^2 + \dots X_n^2,$$

so sind die Auflösungen der Substitutionen folgende:

$$X_\varkappa = a_0^\varkappa x_0 + a_1^\varkappa x_1 + \dots a_n^\varkappa x_n.$$

In diesem Falle unterscheiden sich die Substitutionen (1), (2) von (3), (4) nur durch die Bezeichnung der Variabeln und, wenn das letztere zutrifft, kann man die Gleichung (8) übergehen lassen in:

$$X_0^2 + X_1^2 + \dots X_n^2 = x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2,$$

indem man $X_\varkappa = Y_\varkappa$ und $x_\varkappa = y_\varkappa$ setzt. Daher kann man den Satz auch umkehren, wie folgt:

(27) . . . Wenn die Substitutionen:

$$x_\varkappa = a_\varkappa^0 X_0 + a_\varkappa^1 X_1 + \dots a_\varkappa^n X_n$$

aufgelöset von der Form sind:

$$X_\varkappa = a_0^\varkappa x_0 + a_1^\varkappa x_1 + \dots a_n^\varkappa x_n,$$

so machen sie die Gleichung:

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots x_n^2 = X_0^2 + X_1^2 + \ldots X_n^2$$

zu einer identischen Gleichung.

Die Coefficienten in den Substitutionen (1), (2), welche die Transformation (21) bewirken, haben, wenn $n = 3$ ist, eine bestimmte geometrische Bedeutung, auf welche wir hier aufmerksam machen wollen.

Macht man nämlich die Substitutionen (2) in (21) und vergleicht beide Seiten der Gleichung, so erhält man:

$$e_0^p f'(e_0^q) + e_1^p f'(e_1^q) + \ldots e_3^p f'(e_3^q) = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass $e_0^p, e_1^p, e_2^p, e_3^p$ und $e_0^q, e_1^q, e_2^q, e_3^q$ die homogenen Coordinaten eines Polenpaares sind rücksichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche, durch homogene Punktcoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 analytisch ausgedrückt, sich also darstellt:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Es sind daher die 16 Coefficienten e in den Substitutionen (2) die Coordinaten eines Systemes harmonischer Pole der genannten Oberfläche.

In gleicher Art erweisen sich aus (24) die 16 Substitutionscoefficienten a in (4) als die homogenen Coordinaten eines Systemes harmonischer Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche, durch Ebenencoordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 ausgedrückt, sich so darstellt:

$$F(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Die genannten beiden Oberflächen zweiter Ordnung erweisen sich aber nach der doppelten Darstellungsweise der Oberfläche zweiter Ordnung durch Punktcoordinaten oder durch Ebenencoordinaten als eine und dieselbe Oberfläche, und aus der geometrischen Deutung der Gleichungen (5) im Falle $n=3$ entnehmen wir den Beweis, dass das System harmonischer Polarebenen gerade das System von vier Ebenen ist, welche je drei harmonische Pole aus dem genannten Systeme harmonischer Pole der Oberfläche verbinden.

Da die $(n+1)^2$ Coefficienten in den Substitutionen (1) oder (2), welche den Ausdruck (21) transformiren, noch eine grosse Willkürlichkeit zulassen, so werden wir fortan annehmen, dass diese Substitutionen zwei gegebene homogene Functionen zweiter Ordnung $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ und $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n)$ transformiren in:

$$(28) \ldots \quad \begin{aligned} f(x_0, x_1, \ldots x_n) &= \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots \mu_n X_n^2, \\ \varphi(x_0, x_1, \ldots x_n) &= \nu_0 X_0^2 + \nu_1 X_1^2 + \ldots \nu_n X_n^2. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Annahme nichts Unmögliches enthält. Denn, macht man in (28) die Substitutionen (2) und vergleicht beide Seiten der Gleichungen, so erhält man $(n+1)(n+2)$ Bedingungsgleichungen zwischen den $(n+1)^2$ zu bestimmenden Substitutionscoefficienten e und den $2(n+1)$ ferneren Unbekannten μ und ν. Man hat also $(n+1)$ Unbekannte mehr, als Bedingungsgleichungen. Daraus ist ersichtlich, dass von den $(n+1)(n+3)$ Unbekannten $(n+1)$ beliebige Werthe annehmen können, während die übrigen durch sie bestimmt sind. Welchen $(n+1)$ Unbekannten beliebige Werthe zuertheilt werden können, und wie die Werthe der übrigen sich daraus bestimmen lassen, werden wir zum Schlusse der Untersuchung auseinandersetzen. Gegenwärtig werden wir weitere Folgerungen aus unserer Annahme ziehen.

Wenn wir die zweite Gleichung (28) als eine durch die Substitutionen (1) identische Gleichung betrachten und nach $x_\varkappa$ differentiiren, so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = a_\varkappa^0 \nu_0 X_0 + a_\varkappa^1 \nu_1 X_1 + \ldots a_\varkappa^n \nu_n X_n,$$

eine Gleichung, welche in (4) übergeht, und welche wieder aus (4) hervorgeht, wenn man die Vertauschungen macht:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) \text{ mit } y_\varkappa \text{ und } \nu_\varkappa X_\varkappa \text{ mit } Y_\varkappa.$$

Durch diese Vertauschungen gehen die Substitionen (1) und (4) in einander über, gerade so, wie dieses auch durch die Vertauschungen (23) geschah. Da aber alle bis dahin aufgestellten Gleichungen Folgen sind der Substitutionen (1) bis (4), welche den Gleichungen (28) identisch genügen, und diese Gleichungen selbst als Folgen aus den so definirten

Substitutionen zu betrachten sind, so kann man in allen bisher aufgestellten Gleichungen diese Vertauschungen machen.

Die erste Vertauschung geschieht, indem man setzt:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = y_\varkappa.$$

Durch Auflösung dieses Systemes Gleichungen nach den Variabeln x erhält man, wenn man mit $\Phi(y_0, y_1, \ldots y_n)$ die reciproke Function von $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n)$ bezeichnet:

$$x_\varkappa = \tfrac{1}{2}\Phi'(y_\varkappa).$$

Es ist daher gleichbedeutend, ob man setzt:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = y_\varkappa \text{ oder } x_\varkappa = \tfrac{1}{2}\Phi'(y_\varkappa).$$

Hiernach ist es erlaubt, in allen unseren Gleichungen folgende Vertauschungen zu machen:

$$(29) \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = y_\varkappa \text{ oder } \tfrac{1}{2}\Phi'(y_\varkappa) = x_\varkappa, \text{ und } \nu_\varkappa\, X_\varkappa = Y_\varkappa.$$

Macht man diese Vertauschungen in der zweiten so dargestellten Gleichung (28):

$$x_0\tfrac{1}{2}\varphi'(x_0) + x_1\tfrac{1}{2}\varphi'(x_1) + \ldots x_n\tfrac{1}{2}\varphi'(x_n) = \nu_0X_0^2 + \nu_1X_1^2 + \ldots \nu_nX_n^2,$$

so erhält man die Gleichung:

$$(30) \ \ldots \quad \Phi(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\nu_0} + \frac{Y_1^2}{\nu_1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\nu_n}.$$

Die Bedingungen dieser Gleichung (30) und der Gleichung (24) fassen wir in dem folgenden Satze zusammen:

(31) .... Wenn die Substitutionen (1) und (2) die homogenen Functionen $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ und $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n)$ der zweiten Ordnung transformiren in:

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \mu_0X_0^2 + \mu_1X_1^2 + \ldots \mu_nX_n^2,$$
$$\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n) = \nu_0X_0^2 + \nu_1X_1^2 + \ldots \nu_nX_n^2,$$

so transformiren die Substitutionen (3) und (4) die reciproken Functionen $F(y_0, y_1, \ldots y_n)$ und $\Phi(y_0, y_1, \ldots y_n)$ in:

$$F(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\mu_0} + \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\mu_n},$$
$$\Phi(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\nu_0} + \frac{Y_1^2}{\nu_1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\nu_n}.$$

Wir haben in dem Vorhergehenden zwei Hülfsmittel geschaffen, um aus einer beliebigen Gleichung, die durch die

Substitutionen (1) bis (4), welche die Transformationen (28) bewirken, eine identische wird, neue Gleichungen abzuleiten, nämlich die Vertauschungen (23) oder (29). Da die auf diese Weise abgeleiteten Gleichungen wieder durch die Substitutionen identische Gleichungen werden, so sind wir in der Lage, die vorhandenen Gleichungen in das Unbegrenzte zu vervielfältigen.

Macht man zum Beispiel in der Gleichung (30) die Vertauschungen (23) und in der Gleichung (24) die Vertauschungen (29), und setzt der Kürze wegen:

$$(32) \quad \frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = l_\varkappa,$$

so erhält man mit Einführung der neuen Bezeichnungen f_{+1} und φ_{-1}:

$$(33) \quad \begin{aligned} f_{+1} &= \Phi\left(\tfrac{1}{2}f'(x_0),\ \tfrac{1}{2}f'(x_1),\ \ldots \tfrac{1}{2}f'(x_n)\right) \\ &= \mu_0 l_0 X_0^2 + \mu_1 l_1 X_1^2 + \ldots \mu_n l_n X_n^2, \\ \varphi_{-1} &= F\left(\tfrac{1}{2}\varphi'(x_0),\ \tfrac{1}{2}\varphi'(x_1),\ \ldots \tfrac{1}{2}\varphi'(x_n)\right) \\ &= \nu_0 \frac{1}{l_0} X_0^2 + \nu_1 \frac{1}{l_1} X_1^2 + \ldots \nu_n \frac{1}{l_n} X_n^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen den Satz:

(34) . . . . Wenn die Substitutionen (1) und (2) die homogenen Functionen zweiter Ordnung $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ und $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n)$ transformiren in die Form:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \ldots x_n) &= \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots \mu_n X_n^2, \\ \varphi(x_0, x_1, \ldots x_n) &= \nu_0 X_0^2 + \nu_1 X_1^2 + \ldots \nu_n X_n^2, \end{aligned}$$

so transformiren dieselben Substitutionen die homogenen Functionen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\tfrac{1}{2}f'(x_0),\ \tfrac{1}{2}f'(x_1), \ldots \tfrac{1}{2}f'(x_n)\right) = f_{+1} \text{ und} \\ &F\left(\tfrac{1}{2}\varphi'(x_0),\ \tfrac{1}{2}\varphi'(x_1), \ldots \tfrac{1}{2}\varphi'(x_n)\right) = \varphi_{-1} \text{ in:} \\ &f_{+1} = \mu_0\, l_0\, X_0^2 + \mu_1\, l_1\, X_1^2 + \ldots . \mu_n\, l_n\, X_n^2, \\ &\varphi_{-1} = \nu_0 \frac{1}{l_0}\, X_0^2 + \nu_1 \frac{1}{l_1}\, X_1^2 + \ldots . \nu_n \frac{1}{l_n}\, X_n^2. \end{aligned}$$

Dieser Satz ist die Quelle zur Herleitung einer unbegrenzten Zahl ähnlicher Gleichungen, welche durch die Substitu-

tionen (1) und (2) zu identischen Gleichungen werden. Denn wir haben vier homogene Functionen f, φ, f_{+1}, φ_{-1} der zweiten Ordnung, von welchen je zwei den Bedingungen des Satzes genügen. Es lassen sich demnach aus je zwei derselben zwei neue homogene Functionen zweiter Ordnung herleiten, die durch die Substitutionen (2) nur auf die Quadrate der neuen Variabeln X zurückführen. Diese neuen Functionen genügen aber wieder den Bedingungen des Satzes und können zur Herleitung neuer homogener Functionen zweiter Ordnung von gleicher Eigenschaft dienen.

Auf diese Weise sehen wir aus den beiden gegebenen Functionen (28), f und φ, andere homogene Functionen zweiter Ordnung, f_p und φ_p, von den Variabeln x hervorgehen, welche durch die Substitutionen (2) die Gestalt erhalten:

$$(35)\ \ldots\quad \begin{aligned} f_p &= \mu_0 l_0^p X_0^2 + \mu_1 l_1^p X_1^2 + \ldots \mu_n l_n^p X_n^2, \\ \varphi_p &= \nu_0 l_0^p X_0^2 + \nu_1 l_1^p X_1^2 + \ldots \nu_n l_n^p X_n^2, \end{aligned}$$

wo p irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Alle diese Functionen sind rational in Rücksicht auf die Coefficienten in den gegebenen beiden Functionen f und φ, aus welchen sie hervorgegangen sind.

Durch die Vertauschungen (23) und (29) gehen aus den homogenen Functionen (35) die homogenen Functionen F_p und Φ_p der zweiten Ordnung rücksichtlich der Variabeln y hervor, die durch die Substitutionen (4) die Gestalt erhalten:

$$(36)\ \ldots\ldots\quad \begin{aligned} F_p &= l_0^p \frac{Y_0^2}{\mu_0} + l_1^p \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \ldots l_n^p \frac{Y_n^2}{\mu_n}, \\ \Phi_p &= l_0^p \frac{Y_0^2}{\nu_0} + l_1^p \frac{Y_1^2}{\nu_1} + \ldots l_n^p \frac{Y_n^2}{\nu_n}, \end{aligned}$$

und welche ebenfalls rational aus den Coefficienten der gegebenen Functionen f und φ zusammengesetzt sind.

Um noch andere merkwürdige Relationen herzuleiten, differentiiren wir, indem wir uns die vorhergehenden Gleichungen durch die Substitutionen (1) und (3) zu identischen Gleichungen gemacht denken, die erste Gleichung (35) nach $x_\varkappa$ und die erste Gleichung (36) nach $y_\varkappa$, wodurch wir erhalten:

$$(37)\quad \tfrac{1}{2} f_p'(x_\varkappa) = a_\varkappa^0 \mu_0 l_0^p X_0 + a_\varkappa^1 \mu_1 l_1^p X_1 + \ldots a_\varkappa^n \mu_n l_n^p X_n.$$

$$(38)\quad \tfrac{1}{2} F_p'(y_\varkappa) = c_\varkappa^0 \frac{l_0^p}{\mu_0} Y_0 + c_\varkappa^1 \frac{l_1^p}{\mu_1} Y_1 + \ldots c_\varkappa^n \frac{l_n^p}{\mu_n} Y_n.$$

Wir bilden ferner die Determinante $[a]$ vom $(n+1)$ten Grade rücksichtlich der Variabeln x:

$$(39) \ldots \quad [a] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}f'(x_0), & \frac{1}{2}f'(x_1), & \ldots & \frac{1}{2}f'(x_n) \\ \frac{1}{2}f_1'(x_0), & \frac{1}{2}f_1'(x_1), & \ldots & \frac{1}{2}f_1'(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}f_n'(x_0), & \frac{1}{2}f_n'(x_1), & \ldots & \frac{1}{2}f_n'(x_n) \end{vmatrix}.$$

Durch Einsetzen der Werthe (37) der Componenten zerfällt diese Determinante nach (31) der siebenten Vorlesung in das Product zweier Determinanten, von welchen die eine unter (6) mit A bezeichnet worden ist. Der andere Factor ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 l_0^0 X_0, & \mu_1 l_1^0 X_1, & \ldots & \mu_n l_n^0 X_n \\ \mu_0 l_0^1 X_0, & \mu_1 l_1^1 X_1, & \ldots & \mu_n l_n^1 X_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_0 l_0^n X_0, & \mu_1 l_1^n X_1, & \ldots & \mu_n l_n^n X_n \end{vmatrix}.$$

Aber diese Determinante ist nach (29) der siebenten Vorlesung wieder das Product zweier Factoren, von welchen der eine Factor ist:

$$\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n X_0 X_1 \ldots X_n$$

und der andere Factor die Determinante L:

$$L = \begin{vmatrix} l_0^0, & l_1^0, & \ldots & l_n^0 \\ l_0^1, & l_1^1, & \ldots & l_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_0^n, & l_1^n, & \ldots & l_n^n \end{vmatrix}.$$

Erinnert man sich der Bildungsweise der Determinante L zu Anfang der siebenten Vorlesung aus der Entwickelung des Products der Differenzen:

$$(l_1 - l_0)(l_2 - l_0) \ldots (l_n - l_{n-1})$$

und bemerkt, dass in der Determinante L die oberen Indices der Grössen $l_0, l_1, \ldots l_n$ hier wirkliche Exponenten bedeuten, so sieht man, dass jene Determinante eben jenem Producte gleich ist, weshalb man hat:

$$(40) \ldots \quad L = (l_1 - l_0)(l_2 - l_0) \ldots (l_n - l_{n-1}).$$

Hiernach ist:

$$(41) \ldots \quad [a] = \mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n X_0 X_1 \ldots X_n \,.\, A \,.\, L.$$

Bildet man in gleicher Weise die Determinante $[e]$:

$$(42) \ldots \quad [e] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}F'(y_0), & \frac{1}{2}F'(y_1), & \ldots & \frac{1}{2}F'(y_n) \\ \frac{1}{2}F_1'(y_0), & \frac{1}{2}F_1'(y_1), & \ldots & \frac{1}{2}F_1'(y_n) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \frac{1}{2}F_n'(y_0), & \frac{1}{2}F_n'(y_1), & \ldots & \frac{1}{2}F_n'(y_n) \end{vmatrix}$$

und setzt die Werthe (38) der Componenten ein, so erhält man nach analogen Reductionen:

$$(43) \ldots\ldots \quad [e] = \frac{Y_0 Y_1 \ldots Y_n}{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n} \cdot E \cdot L.$$

Setzt man endlich, um abzukürzen:

$$(44) \ldots\ldots\ldots \quad M = \mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n,$$

so kann man die Gleichungen (41) und (43) so darstellen:

$$(45) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} X_0 X_1 \ldots X_n &= \frac{[a]}{M \,.\, A \,.\, L}, \\ Y_0 Y_1 \ldots Y_n &= \frac{M \,.\, [e]}{E \,.\, L}. \end{aligned}$$

Diese Producte der Variabeln X und der Variabeln Y begegneten uns schon in dem Anfange unserer Vorlesung, der von beliebigen linearen Substitutionen handelte, und zwar in den Gleichungen (12) und (13), wenn $\beta_0 = \beta_1 = \ldots \beta_n = 1$. Da das Allgemeine auch zutreffen muss in einem speciellen Falle, nämlich dem hier vorliegenden, wenn die Substitutionen (1)—(4) die Gleichungen (28) zu identischen Gleichungen machen, so ergeben sich daraus die Gleichungen:

$$(46) \ldots \quad \begin{aligned} \Sigma A_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} &= \frac{[a]}{M \,.\, A \,.\, L}, \\ \Sigma E_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n} &= \frac{M \,.\, [e]}{E \,.\, L}. \end{aligned}$$

Entwickeln wir nun die in (39) und (42) definirten Determinanten $[a]$ und $[e]$ nach den Variabeln x und y, wie folgt:

$$(47) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} [a] &= \Sigma\, a_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\ [e] &= \Sigma\, e_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

und setzen diese Entwickelungen in (46) ein, so ergiebt die Gleichstellung der Coefficienten gleicher Producte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen die sehr bemerkenswerthen Relationen:

$$(48) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A \,.\, A_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} &= \frac{a_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}}{M \,.\, L}, \\ E \,.\, E_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} &= \frac{M \,.\, e_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}}{L}. \end{aligned}$$

Die linken Theile dieser Gleichungen sind nämlich ganze Functionen der Substitutionscoefficienten a oder e, die rechten Theile sind, abgesehen von den beiden Grössen M und L, deren Bedeutung in dem nächsten Abschnitte zu Tage treten wird, rationale Functionen der Coefficienten in den durch die Substitutionen zu transformirenden Functionen f und φ.

Multipliciren wir nun die Gleichungen (48) mit einander, unter Berücksichtigung, dass nach (7) $AE = 1$ ist und setzen das Product in die Gleichung (14) ein, in welcher $\beta_0 = \beta_1 = \ldots \beta_n = 1$ sein soll, so erhalten wir:

$$(49) \ldots \quad L^2 = \Sigma C_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \,.\, a_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \,.\, e_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Es ist hiermit die noch ausführlicher zu definirende Grösse L^2 dargestellt als die Summe von Producten gleichartiger Factoren a und e, welche sind rationale Functionen der Coefficienten in den gegebenen Functionen f und φ. Die Grössen C sind nämlich nur ganze positive Zahlen.

Nachdem wir in den vorausgegangenen Sätzen und Gleichungen mannichfaltige Eigenschaften der Substitutionen (1) bis (4), welche die Transformationen (28) bewirken, dargelegt haben, so bleibt noch übrig, diese Substitutionen selbst zu bestimmen und die Werthe der Coefficienten μ und ν in den transformirten Ausdrücken (28) festzustellen.

Ein Weg zur Lösung dieser Aufgabe ist bereits am Anfange der Untersuchung angedeutet worden. Macht man nämlich in (28) die Substitutionen (2), so erhält man durch Vergleichung beider Seiten der Gleichungen $(n+1)(n+2)$ Gleichungen zwischen den $(n+1)(n+3)$ zu bestimmenden Unbekannten. Diese Gleichungen hätte man weiter zu behandeln.

Ein zweites, dem angegebenen äquivalentes, System Gleichungen zwischen einer gleichen Zahl von Unbekannten erhält

man, wenn man in (28) die Substitutionen (1) macht und beide Seiten der Gleichung mit einander vergleicht.

In beiden Fällen sieht man, dass die Zahl der Unbekannten um $(n+1)$ grösser ist, als die Zahl der Gleichungen zwischen den Unbekannten. Daher müssen $(n+1)$ von den Unbekannten willkürlich bleiben und die übrigen sich durch diese ausdrücken lassen.

Versucht man das eine System von Gleichungen auf das andere äquivalente zurückzuführen, so ergiebt sich daraus eine dritte Behandlung der Aufgabe, welche sich durch grosse Einfachheit für die Darstellung empfiehlt, und der wir deshalb hier den Vorzug geben.

Betrachtet man die Gleichungen (28) als identische durch die Substitutionen (1) und differentiirt nach x_λ, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}f'(x_\lambda) = a_\lambda^0 \mu_0 X_0 + a_\lambda^1 \mu_1 X_1 + \dots a_\lambda^n \mu_n X_n,$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\lambda) = a_\lambda^0 \nu_0 X_0 + a_\lambda^1 \nu_1 X_1 + \dots a_\lambda^n \nu_n X_n,$$

Gleichungen, welche, gleich wie die Gleichungen (28), aus den Substitutionen folgen.

Die Substitutionen werden erfüllt, wenn man:

$$\begin{array}{llllll} \text{für:} & X_0, & X_1, \dots & X_\varkappa, \dots & X_n \\ \text{setzt:} & 0, & 0, \dots & 1, \dots & 0 \end{array}$$

und zugleich

$$\begin{array}{llll} \text{für:} & x_0, & x_1, \dots & x_n \\ \text{setzt:} & e_0^\varkappa, & e_1^\varkappa, \dots & e_n^\varkappa. \end{array}$$

Die angegebenen beiden Gleichungen müssen dadurch auch erfüllt werden, weshalb man hat:

$$\tfrac{1}{2}f'(e_\lambda^\varkappa) = a_\lambda^\varkappa \mu_\varkappa,$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(e_\lambda^\varkappa) = a_\lambda^\varkappa \nu_\varkappa.$$

Eliminirt man $a_\lambda^\varkappa$ aus diesen Gleichungen, so erhält man, mit Rücksicht auf die Bezeichnung (32): $\frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = l_\varkappa$:

$$(50) \quad \dots\dots \quad f'(e_\lambda^\varkappa) - l_\varkappa \varphi'(e_\lambda^\varkappa) = 0.$$

Aus dieser Gleichung geht, wenn man für λ setzt 0, 1, 2, .. n ein ganzes System von $(n+1)$ Gleichungen hervor zwischen den $(n+2)$ Unbekannten:

$$l_\varkappa, \; e_0^\varkappa, \; e_1^\varkappa, \dots e_n^\varkappa.$$

Dieses System von $(n+1)$ Gleichungen ist linear und homogen in Rücksicht auf die letzten $(n+1)$ Unbekannten. Eliminirt man dieselben, so erhält man eine Gleichung $\Delta = 0$ vom $(n+1)$ten Grade in Rücksicht auf die eine Unbekannte $l_\varkappa$.

Um diese Gleichung $\Delta = 0$ darzustellen, bedarf es der Kenntniss der beiden zu transformirenden Functionen f und φ. Wir werden deshalb annehmen, dass:

$$(51) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} f(x_0, x_1 \ldots x_n) &= \Sigma\, a^{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa x_\lambda, \\ \varphi(x_0, x_1 \ldots x_n) &= \Sigma\, a_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa x_\lambda. \end{aligned}$$

In dieser Voraussetzung stellt sich die Gleichung $\Delta = 0$ so dar:

$$(52) \ldots \begin{vmatrix} l_\varkappa a_{00} - a^{00}, & l_\varkappa a_{01} - a^{01}, & \ldots & l_\varkappa a_{0n} - a^{0n} \\ l_\varkappa a_{10} - a^{10}, & l_\varkappa a_{11} - a^{11}, & \ldots & l_\varkappa a_{1n} - a^{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_\varkappa a_{n0} - a^{n0}, & l_\varkappa a_{n1} - a^{n1}, & \ldots & l_\varkappa a_{nn} - a^{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind gerade die zu bestimmenden Grössen $l_0, l_1 \ldots l_n$.

Hat man dieselben bestimmt, so ist aus der Gleichung (32), $\mu_\varkappa = l_\varkappa \nu_\varkappa$, ersichtlich, dass den $(n+1)$ Grössen μ oder ν beliebige Werthe zuertheilt werden können. Wir werden annehmen, dass die ersteren sämmtlich der Einheit gleich seien. Alsdann haben wir auf Grund von (44) und (32):

$$(53) \ \ldots \quad 1 = \mu_0 = \mu_1 = \ldots \mu_n = M; \quad \nu_\varkappa = \frac{1}{l_\varkappa}.$$

Die $(n+1)$ Grössen ν in der zweiten transformirten Function (28) sind also als die reciproken Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ bestimmt.

Setzt man die Wurzeln $l_\varkappa$ der Gleichung $\Delta = 0$ in das System Gleichungen (50) ein, so lassen sich daraus die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten $e_0{}^\varkappa, e_1{}^\varkappa \ldots e_n{}^\varkappa$ in linearer Weise berechnen. Zur Feststellung ihrer wirklichen Werthe bedarf es noch einer Gleichung, die wir aus der ersten Gleichung (28) erhalten, wenn wir für die Variabeln X und x diejenigen Werthe setzen, welche wir schon zur Ableitung der Gleichung (50) verwendet haben. Wir erhalten nämlich, da $\mu_\varkappa = 1$ ist, die gesuchte Gleichung:

(54) . . . . $f(e_0^\varkappa, e_1^\varkappa \ldots e_n^\varkappa) = 1.$

Wir können hiermit das behandelte Problem der Transformation zweier gegebenen homogenen Functionen der zweiten Ordnung, f und φ, durch lineare Substitutionen in die Summe von Quadraten neuer Variabeln als gelöset betrachten. Dasselbe wurde zurückgeführt auf die Auflösung einer Gleichung (52), $\varDelta = 0$, von einem Grade, der gleich ist der Zahl der Variabeln in den beiden gegebenen Functionen. Es wurde dabei bemerkt, dass es erlaubt sei, die Coefficienten μ beliebig anzunehmen und darum auch sämmtlich der Einheit gleich zu setzen, und dass dann die Coefficienten ν die reciproken Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$ werden. Die Kenntniss der Wurzeln dieser Gleichung vorausgesetzt, ergaben sich hierauf die Verhältnisse gewisser Substitutionscoefficienten e in den Substitutionen (1) bis (4) durch Auflösung linearer Gleichungen (50), und ihre wahren Werthe aus den Gleichungen (54), so dass alle Substitutionscoefficienten e bekannt wurden. Die Substitutionscoefficienten a ergeben sich endlich aus den Auflösungen der Substitutionen mit den Coefficienten e.

Wenn man nun die Auflösung linearer Gleichungen (50) und auch die Quadratwurzelbestimmung durch (54) zur Feststellung der Werthe der Substitutionscoefficienten e für Nichts erachtet, so verlangt das behandelte Problem nur die Auflösung der Gleichung $\varDelta = 0$. Auf die Natur dieser Gleichung wollen wir näher eingehen.

Es ist bekannt, dass eine jede rationale symmetrische Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung sich durch die Coefficienten in der Gleichung rational ausdrücken lässt. Das in (40) dargestellte Produkt L ist eine alternirende Function der Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$, und darum L^2 eine symmetrische Function. Letztere lässt sich also rational durch die Coefficienten in der Gleichung $\varDelta = 0$ ausdrücken, und, da die genannten Coefficienten wiederum rationale Ausdrücke der Coefficienten in den beiden gegebenen Functionen f und φ sind, so lässt sich L^2 auch rational ausdrücken durch die Coefficienten in den Functionen f und φ.

Die Gleichung (49) ist eben dieser Ausdruck. Denn die

Grössen a und e in ihr sind nach (47) nichts anderes, als die Entwickelungscoefficienten der in (39) und (42) definirten Determinanten $[a]$ und $[e]$ und die Grössen C nach (9) ganze Zahlen.

Die Substitutionscoefficienten a und e sind in dem Vorhergehenden als unsymmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$ bestimmt worden. Die linken Theile der Gleichungen (48), die nach (6), (12) und (13) nur aus den genannten Substitutionscoefficienten zusammengesetzt sind, sind auch unsymmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$. Multipliciren wir sie jedoch mit der alternirenden Function L, so lassen sich die Produkte, wie die Gleichungen (48) beweisen, da $M = 1$ ist, durch die Coefficienten in den gegebenen Functionen f und φ rational ausdrücken. Diese Gleichungen (48) bilden in dem Falle $\beta_0 = \beta_1 = \ldots \beta_n = 1$ überdies die Vermittelung zwischen den Gleichungen (14) und (49). Denn es geht eine jede dadurch in die andere über.

Um die Bedeutung unserer allgemeinen Entwickelungen noch anschaulicher zu machen und uns zugleich der vorhergehenden Vorlesung wieder zu nähern, wollen wir den speciellen Fall betrachten, wenn die zu transformirende Function f die Summe der Quadrate der Variabeln x ist.

Nach dem Satze (26) sind in diesem Falle die Substitutionscoefficienten a den gleichbezeichneten Substitutionscoefficienten c gleich, und die Substitutionen (1) und (3) sind demnach nur verschieden durch die Bezeichnung der Variabeln, sowie die Substitutionen (2) und (4). Wenn aber die Variabeln X und Y, gleich wie die Variabeln x und y, gleiche Bedeutung haben, so werden auch in (12) und (13) die Entwickelungscoefficienten A und E einander gleich und nach (48), da $M = 1$ ist, die Entwickelungscoefficienten a und e der Determinanten $[a]$ und $[e]$ in (47).

Richten wir nun unser Augenmerk auf die Gleichung (52), $\varDelta = 0$, von welcher das specielle Problem abhängt, so sehen wir, dass, im Falle $n = 2$, dieselbe übergeht in die Gleichung $\varDelta = 0$ der vorhergehenden Vorlesung, wenn wir setzen $l = \frac{1}{\lambda}$. Die dort angegebene Eigenschaft der Gleichung theilt diese Gleichung mit ihr.

Die Gleichung $\varDelta = 0$, von welcher das specialisirte Problem abhängt, hat nur reelle Wurzeln.

Der Beweis dieses Satzes von Cauchy ist in der vorhergehenden Vorlesung bereits angedeutet worden.

Da die Coefficienten a den ihnen entsprechenden Coefficienten e gleich sind, so stellt sich in (49) die symmetrische Function L^2 der Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$ als die Summe von Quadraten dar.

Die Bedingung, dass zwei Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$ gleich seien, ist allerdings nur eine Gleichung, $L^2 = 0$, aber man ersieht aus der Gleichung (49), wie aus dieser einen Gleichung unter der Voraussetzung reeller Coefficienten in der Function φ gleich mehrere Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten entspringen. Von letzteren sind einige die Folgen von den anderen. Darum hat man auch weniger Bedingungsgleichungen für die Gleichheit zweier Wurzeln, als die Gleichung (49) Quadrate in ihrem rechten Theile enthält.

Die nothwendigen Bedingungen für die Gleichheit zweier Wurzeln zu bezeichnen, und daraus die anderen Bedingungsgleichungen abzuleiten, empfiehlt sich hiernach als eine interessante Aufgabe.

Zum Schlusse der Vorlesung müssen wir noch hervorheben, dass unsere Transformation zweier gegebenen Functionen zweiter Ordnung in die Summe von Quadraten der neuen Variabeln, wie die Gleichungen (28) es anzeigen, auf der Ungleichheit der Wurzeln der in (52) dargestellten Gleichung $\varDelta = 0$ beruht. Denn, wenn zwei Wurzeln dieser Gleichung gleich werden, so lassen sich nicht mehr die gegebenen Functionen als die Summen von Quadraten neuer Variabeln darstellen. Sie lassen sich aber doch wieder als die Summen von Quadraten neuer Variabeln darstellen, wenn gewisse Bedingungen zwischen den Coefficienten in den gegebenen Functionen hinzutreten. Das Ausführliche darüber findet man in Weierstrass Abhandlungen in den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1858, p. 207 und 1868 p. 310.

Die vorstehende Vorlesung bildet ein zusammenhängendes Ganze. Sie ist entstanden in dem Wunsche, die eleganten algebraischen Entdeckungen von Jacobi, Kummer und Borchardt in der Richtung des Hauptaxenproblemes der Oberflächen zweiter Ordnung wie aus einem Gusse dem Zuhörer oder Leser vorzuführen.

Von dem grossen Werthe der genannten Entdeckungen kann man sich jedoch keine rechte Vorstellung machen, wenn man nur sieht, wie ohne Schwierigkeit das Folgende aus dem Vorhergehenden hervorgeht.

Wir gehen darum auf die Geschichte des, in der vorstehenden Vorlesung behandelten, Problemes näher ein.

Wenn wir uns vorstellen, dass das Probleme der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung algebraisch aufgefasst war, etwa wie in der neunzehnten Vorlesung, so lag der Gedanke nahe, das Problem auszudehnen auf die Transformation irgend zweier homogenen Functionen zweiter Ordnung von beliebig vielen Variabeln. Jacobi hat diesen Gedanken ausgeführt in seiner, oft citirten, Abhandlung: *De binis quibuslibet functionibus*.. Crelle's Journal Bd. 12. p. 1, indem er das Problem auf die Auflösung der Gleichung (52), $\varDelta = 0$, zurückführte.

Aber es galt noch in dem Problem der Hauptaxen selbst eine algebraische Schwierigkeit zu überwinden, welche darin bestand, einzusehen, wie die eine Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$, von welcher das Problem abhängt, sich in die zwei Bedingungen (39) der neunzehnten Vorlesung zerspaltet.

Die gleiche Schwierigkeit in dem Probleme der Hauptaxen eines Kegelschnittes hatte, wie wir in der späteren Vorlesung über die Rotationsflächen zweiter Ordnung zeigen werden, darin ihre Auflösung gefunden, dass sich die eine Bedingung der Gleichheit der Wurzeln in der Gleichung, von welcher das Problem abhängt, leicht als die verschwindende Summe zweier Quadrate darstellen liess. Darum, so schloss Kummer, werde sich auch die eine Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ als die verschwindende Summe von Quadraten darstellen lassen.

Mit Ueberwindung unsäglicher Schwierigkeiten gelang es Kummer, die eine Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung $\varDelta = 0$ als die verschwindende Summe von 10 oder auch von 7 Quadraten in seiner unvergesslichen Abhandlung „Bemerkungen über die kubische Gleichung . . . Crelle's Journal Bd. 26, p. 268" darzustellen.

Auf die Kummer'schen Quadrate näher einzugehen, wird uns die spätere Vorlesung über die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung Gelegenheit geben. Hier ist es die Gleichung (49), aus welcher Kummer's Entwickelung als ein ganz specieller Fall hervorgeht.

Da aber der Weg der Erfindung nur in sehr seltenen Fällen sich als der Weg der Darstellung und demnach als der Weg der Fortentwickelung empfiehlt, so untersuchte Jacobi in seiner Abhandlung „Sulla condizione . . . Crelle's Journal Bd. 30, p. 46." die Kummer'schen Quadrate jedes für sich, und fand, dass ihre Wurzeln sich mit einem, für alle gleichbleibenden, Factor multiplicirt, als Entwickelungs-

coefficienten darstellen lassen. Ausführlicher werden Jacobi's Entdeckungen in der Vorlesung über Rotationsoberflächen zweiter Ordnung vorgeführt werden. In der vorstehenden Vorlesung sind es die Gleichungen (48), welche seine Ideen erweitert wiedergeben.

Wenn eine der beiden gegebenen Functionen f und φ von beliebig vielen Variabeln die Summe der Quadrate der Variabeln ist, so hat, wie nachgewiesen wurde, die Gleichung $\Delta = 0$ nur reelle Wurzeln.

Durch Determinanten-Bildung gelang es endlich Borchardt, die Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln dieser Gleichung als die verschwindende Summe von Quadraten darzustellen. Seine unter dem Titel: „Neue Eigenschaften derjenigen Gleichung ... in Crelle's Journal Bd. 30. p. 38“ veröffentlichte Entwickelung ist aus der obigen Gleichung (49) abzunehmen. Dieselbe bildet das Schlussglied einer zusammenhängenden Kette von Problemen, deren elegante Lösungen wohl geeignet sind, lebhaftes Interesse zu erregen.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Curven zweiter Ordnung. Confocale Kegelschnitte und elliptische Coordinaten in der Ebene.

Das Problem der Hauptaxen einer Curve zweiter Ordnung in der Ebene, algebraisch aufgefasst, besteht darin:

Die linearen Substitutionen zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad x^2 + y^2 = X^2 + Y^2,$$

$$(2) \quad \dots\dots\dots \quad \varphi(x, y) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2$$

zu identischen Gleichungen machen, wenn $\varphi(x, y)$ eine gegebene homogene Function der zweiten Ordnung ist von den Variabeln x und y.

Wir werden, indem wir die Lösung dieses Problemes beabsichtigen, annehmen, dass die Function $\varphi(x, y)$ die Form habe:

$$(3) \quad \ldots \quad \varphi(x, y) = (\beta_0 x + \beta_1 y)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2),$$

auf welche Form sich die gegebene Function leicht zurückführen lässt.

Die Substitutionen, welche die Transformation (1) und (2) bewirken, mit ihren Auflösungen seien:

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad \begin{aligned} x &= a^0 X + a' Y, \quad X = a^0 x + b^0 y, \\ y &= b^0 X + b' Y, \quad Y = a' x + b' y. \end{aligned}$$

Dass die Auflösungen der Substitutionen gerade die angegebene Form haben, geht hervor aus der Differentiation der durch die Substitutionen identischen Gleichung (1) nach X und Y.

Um nun die vier Coefficienten in den Substitutionen (4) zu bestimmen, werden wir die Grössen B_0 und B_1 einführen durch folgende lineare Gleichungen, deren Auflösungen wir zugleich beifügen:

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad \begin{aligned} \beta_0 &= a^0 B_0 + a' B_1, \quad B_0 = a^0 \beta_0 + b^0 \beta_1, \\ \beta_1 &= b^0 B_0 + b' B_1, \quad B_1 = a' \beta_0 + b' \beta_1. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen gehen aus der identischen Gleichung (2) durch Differentiation folgende Gleichungen hervor:

$$(6) \quad \ldots \ldots \quad \begin{aligned} a^0 &= \frac{B_0 \beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, \qquad b^0 = \frac{B_0 \beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, \\ a' &= \frac{B_1 \beta_0}{\alpha_0 + \lambda_1}. \qquad b' = \frac{B_1 \beta_1}{\alpha_1 + \lambda_1}. \end{aligned}$$

Denn differentiirt man die genannte Gleichung nach x und setzt $X = 1$, $Y = 0$ und zugleich $x = a^0$, $y = b^0$, welches letztere durch die Substitutionen (4) geboten ist, so erhält man mit Rücksicht auf (5) die erste Gleichung (6) u. s. w.

Auf diese Weise haben wir die vier zu bestimmenden Substitutions-Coefficienten ausgedrückt durch die vier neuen Unbekannten λ_0, λ_1, B_0, B_1, deren Werthe noch festzustellen sind.

Multipliciren wir zu diesem Zwecke die Horizontal-Gleichungen (6) mit β_0 und β_1 und addiren, oder multipliciren wir die Vertical-Gleichungen (6) mit B_0 und B_1 und addiren, so erhalten wir:

$$(7)\quad \begin{aligned} &\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha_0+\lambda_1}=1, \\ &\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_1}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_1}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha_1+\lambda_1}=1. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen, von welchen jede nur eine Unbekannte λ_0 oder λ_1 enthält, dienen zum Beweise, dass diese Unbekannten die Wurzeln sind der folgenden quadratischen Gleichung in λ, die beiden anderen, dass α_0 und α_1 die Wurzeln sind der quadratischen Gleichung in α:

$$(8)\;.\;.\;.\;.\quad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha+\lambda_1}=1.$$

Durch die erste von diesen Gleichungen sind also die beiden Unbekannten λ_0 und λ_1 als Wurzeln der Gleichung bestimmt. Um auch die Werthe der beiden anderen Unbekannten B_0 und B_1 festzustellen, bemerken wir, dass identisch ist:

$$(9)\quad \begin{aligned} &(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)-\beta_0^2(\alpha_1+\lambda)-\beta_1^2(\alpha_0+\lambda)=(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1), \\ &(\alpha+\lambda_0)(\alpha+\lambda_1)-B_0^2(\alpha+\lambda_1)-B_1^2(\alpha+\lambda_0)=(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1). \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für λ entweder $-\alpha_0$ oder $-\alpha_1$ und für α entweder $-\lambda_0$ oder $-\lambda_1$, so erhält man:

$$(10)\quad \begin{aligned} &\beta_0^2=\frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)}{\alpha_0-\alpha_1}, \quad B_0^2=\frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_0)}{\lambda_0-\lambda_1}, \\ &\beta_1^2=\frac{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)}{\alpha_1-\alpha_0}, \quad B_1^2=\frac{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_0}. \end{aligned}$$

Die beiden letzten von diesen Gleichungen geben die Werthe der beiden letzten Unbekannten B_0 und B_1.

Dass die Werthe der Substitutions-Coefficienten in (6) reelle sind, ersieht man erstens aus der quadratischen Gleichung (8), deren grösste Wurzel λ_0 zwischen ∞ und $-\alpha_1$ liegt, und deren kleinste Wurzel λ_1 zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_0$ liegt, wenn $\alpha_0 > \alpha_1$; zweitens aus den in (10) gegebenen Werthen B_0^2 und B_1^2, welche hiernach positiv sind.

Wenn man die vorangegangenen Formeln überblickt, so fällt der Dualismus derselben in die Augen. Dieser Dualismus lässt sich auf Grund der folgenden Betrachtungen zu einem Princip machen.

Multiplicirt man die beiden ersten Gleichungen (5) mit x und y und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (4):

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \beta_0 x + \beta_1 y = B_0 X + B_1 Y,$$

wodurch die Gleichung (2):

$$(12) \ldots (\beta_0 x + \beta_1 y)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2$$

übergeht in:

$$(13) \quad (B_0 X + B_1 Y)^2 - (\lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2) = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2.$$

Wenn demnach die Substitutionen (4) die Gleichungen (1) und (12) zu identischen Gleichungen machen, so machen auch die Auflösungen dieser Substitutionen die Gleichungen (1) und (13) zu identischen Gleichungen und umgekehrt. Daraus ergiebt sich nun folgende Regel zur Herleitung neuer Formeln:

Es ist erlaubt, in allen Formeln, die aus den Substitutionen (4), welche die Gleichungen (1) und (2) zu identischen Gleichungen machen, hervorgehen, folgende gleichzeitige Vertauschungen zu machen:

$$(14) \ldots \quad \begin{matrix} ,, & x, & y, & \alpha_0, & \alpha_1, & \beta_0, & \beta_1, & b^0, & a' \\ ,, & X, & Y, & \lambda_0, & \lambda_1, & B_0, & B_1, & a', & b^0. \end{matrix}$$

Hiernach genügt es, ein System Formeln wirklich zu entwickeln, weil ein zweites System nach dieser Regel von selbst folgt.

Zieht man die Gleichung (1), nachdem man sie mit einem Factor λ multiplicirt hat, von (12) ab, so erhält man:

$$(15) \quad \{\beta_0 x + \beta_1 y\}^2 - \{(\alpha_0 + \lambda) x^2 + (\alpha_1 + \lambda) y^2\} = (\lambda_0 - \lambda) X^2 + (\lambda_1 - \lambda) Y^2.$$

Diese Gleichung, an die Stelle der Gleichung (2) gesetzt, lässt erkennen, dass es frei steht, in allen zur Lösung des Problemes entwickelten Formeln, zu verändern:

$$(16) \ldots \quad \begin{matrix} ,, & & \alpha_0, & \alpha_1, & \lambda_0, & \lambda_1, \\ ,, & \text{in} & \alpha_0 + \lambda, & \alpha_1 + \lambda, & \lambda_0 - \lambda, & \lambda_1 - \lambda. \end{matrix}$$

Durch diese Aenderungen werden die Grössen B_0 und B_1 nicht geändert. Es bilden daher auch die Formeln keine Aus-

nahme von der Regel, in welche die durch die Gleichungen (5) definirten Grössen B_0 und B_1 eingehen.

Um ein drittes Princip zur Herleitung neuer Formeln zu entwickeln, werden wir die reciproke Function $\Phi(u, v)$ der gegebenen Function $\varphi(x, y)$ feststellen dadurch, dass wir nach Vorschrift von (25) der siebenten Vorlesung setzen: $u = \frac{1}{2}\varphi'(x)$, $v = \frac{1}{2}\varphi'(y)$. Die Auflösungen sind dann nach (27) folgende: $x = \frac{1}{2}\Phi'(u)$, $y = \frac{1}{2}\Phi'(v)$ und die reciproke Function selbst wird: $\Phi(u, v) = \frac{1}{2}\{u\Phi'(u) + v\Phi'(v)\}$.

Die Ausführung der, durch die Zeichensprache angedeuteten, analytischen Operationen zur Bestimmung der reciproken Function giebt:

$$(17)\ \ldots\quad \Phi(u, v) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}u + \frac{\beta_1}{\alpha_1}v\right)^2 - \left(\frac{u^2}{\alpha_0} + \frac{v^2}{\alpha_1}\right),$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(18)\ \ldots\ldots\ldots\quad \varepsilon = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} - 1.$$

Die Substitutionen (4) entsprechen den Substitutionen (2) und (1) in der zwanzigsten Vorlesung, und zwar in dem Falle, in welchem der dort aufgeführte Satz (26) gilt. Da aber unter der Voraussetzung dieses Satzes die Substitutionen (1) und (2) in der genannten Vorlesung sich von den darauf folgenden (3) und (4) nur durch die Bezeichnung der Variabeln unterscheiden, so hat man auf Grund des Satzes (25) in jener Vorlesung die, durch unsere Substitutionen (4) identische Gleichung:

$$(19)\quad \varepsilon.\Phi(x, y) = \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}x + \frac{\beta_1}{\alpha_1}y\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1}\right) = \varepsilon\left(\frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1}\right).$$

Da man diese Gleichung an Stelle der Gleichung (2) des Problems nehmen kann, so sieht man, dass es erlaubt ist, in allen unseren Formeln folgende, gleichzeitige, Vertauschungen eintreten zu lassen:

$$(20)\ \ldots\quad \begin{array}{l} ,,\quad \beta_0,\ \beta_1,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ B_0,\ B_1, \\ ,,\ \text{in}\ \frac{\beta_0}{\alpha_0},\ \frac{\beta_1}{\alpha_1},\ \frac{\varepsilon}{\alpha_0},\ \frac{\varepsilon}{\alpha_1},\ \frac{\varepsilon}{\lambda_0},\ \frac{\varepsilon}{\lambda_1},\ \frac{\varepsilon B_0}{\lambda_0},\ \frac{\varepsilon B_1}{\lambda_1}. \end{array}$$

Die angegebenen Veränderungen der Grössen B_0 und B_1 er-

geben sich aus den Werthen (6) der Substitutions-Coefficienten, welche durch die vorangegangenen Veränderungen keine Aenderung erfahren dürfen.

Macht man in der Gleichung (19) die Veränderungen (16) und bemerkt, dass ε durch diese Veränderung übergeht in:

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad E = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda} - 1,$$

so erhält man:

$$(22) \quad \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda}x + \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda}y\right)^2 - E\left(\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{y^2}{\alpha_1+\lambda}\right) = E\left(\frac{X^2}{\lambda_0-\lambda} + \frac{Y^2}{\lambda_1-\lambda}\right)$$

eine Gleichung, welche, wie die vorhergehende (19), durch die Substitutionen (4), welche die Transformationen (1) und (2) bewirken, ebenfalls zu einer identischen Gleichung wird, welchen Werth auch λ habe.

Ein System eleganter Formeln, dienlich zu weiteren Transformationen, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden auf folgende Art:

Macht man die Auflösungen der Substitutionen (4) durch die Substitutionen zu identischen Gleichungen und vergleicht die Coefficienten gleicher Variabeln, so erhält man:

$$a^0 a^0 + b^0 b^0 = 1, \quad a'a' + b'b' = 1, \quad a^0 a' + b^0 b' = 0.$$

Durch Einsetzen der Werthe (6) der Substitutions-Coefficienten gehen diese Gleichungen über in:

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 + \lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1 + \lambda_0)^2} &= \frac{1}{B_0^2}, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 + \lambda_1)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1 + \lambda_1)^2} &= \frac{1}{B_1^2}, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 + \lambda_0)(\alpha_0 + \lambda_1)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1 + \lambda_0)(\alpha_1 + \lambda_1)} &= 0. \end{aligned}$$

Macht man in den beiden ersten Gleichungen (7) die Aenderungen (20) und hierauf die Aenderung (16), so erhält man:

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 + \lambda_0)(\alpha_0 + \lambda)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1 + \lambda_0)(\alpha_1 + \lambda)} &= \frac{E}{\lambda_0 - \lambda}, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 + \lambda_1)(\alpha_0 + \lambda)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1 + \lambda_1)(\alpha_1 + \lambda)} &= \frac{E}{\lambda_1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Differentiirt man diese in λ identischen Gleichungen und setzt

hierauf für λ entweder λ_0 oder λ_1, so erhält man mit Rücksicht auf (23) und (7):

$$(25)\qquad \begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)^2}&=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)B_1^2},\\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_0)^2}&=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)B_0^2}. \end{aligned}$$

Wenn man die Grössen B_0 und B_1 als Functionen von $\alpha_0, \alpha_1, \lambda_0, \lambda_1$ betrachtet, wie sie durch (10) ausgedrückt sind, und die Logarithmen dieser Ausdrücke partiell differentiirt nach λ_0 und λ_1, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{2}{B_0}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial\lambda_0}&=\frac{1}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{1}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0},\\ \frac{2}{B_1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_1}&=\frac{1}{\alpha_0+\lambda_1}+\frac{1}{\alpha_1+\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}. \end{aligned}$$

Aehnliche Ausdrücke gehen aus der so dargestellten ersten Gleichung (9):

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}-1=-\frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}{(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)}$$

hervor, wenn man diese in λ identische Gleichung zweimal nach λ differentiirt, und nach der Differentiation für λ setzt entweder λ_0 oder λ_1, nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^3}&=\frac{1}{B_0^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{1}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}\right\},\\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^3}&=\frac{1}{B_1^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_1}+\frac{1}{\alpha_1+\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}\right\}. \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen mit den beiden vorher abgeleiteten Gleichungen ergiebt endlich:

$$(26)\;\ldots\ldots\qquad \begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^3}&=\frac{2}{B_0^3}\,\frac{\partial B_0}{\partial\lambda_0},\\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^3}&=\frac{2}{B_1^3}\,\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_1}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise, als das behandelte algebraische Problem geometrisch aufgefasst werden kann, kann man auch einzelnen von den entwickelten Formeln eine geometrische Bedeutung unterlegen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke β_0 und β_1 als die variabeln rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in der Ebene, so stellt die erste Gleichung (8) einen auf seine Hauptaxen bezogenen Kegelschnitt dar, und, wenn man in jener Gleichung λ variiren lässt, ein ganzes System Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten, weshalb sie confocale Kegelschnitte genannt werden. Betrachten wir dagegen β_0 und β_1 als die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebig gegebenen Punktes in der Ebene, so liefern die beiden ersten Gleichungen (7) den Beweis, dass durch jeden beliebig gegebenen Punkt in der Ebene nur zwei, mit einem gegebenen Kegelschnitt confocale, Kegelschnitte hindurchgehen. Aber auch über die Natur dieser Kegelschnitte können wir uns Gewissheit verschaffen, nachdem wir in dem Vorhergehenden die Grenzen der Wurzeln λ_0 und λ_1 festgestellt haben. Da nämlich beide Nenner in der ersten Gleichung (7) positiv, in der zweiten der erste Nenner positiv, der andere negativ sind, so muss der eine Kegelschnitt eine Ellipse, der andere eine Hyperbel sein.

Errichtet man in dem beliebig gegebenen Punkte, durch welchen die beiden confocalen Kegelschnitte gehen, Normalen an die beiden Kegelschnitte, so verhalten sich die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Ellipse mit den Coordinatenaxen bildet wie:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0} : \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0},$$

und für die Hyperbel hat man:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_1} : \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_1}.$$

Die dritte Gleichung (23) dient zum Beweise, dass diese Normalen auf einander senkrecht stehen, oder, was dasselbe sagt, dass die beiden confocalen Kegelschnitte sich senkrecht schneiden. Diese Bemerkungen fassen wir kurz zusammen, wie folgt:

Confocale Kegelschnitte derselben Art schneiden sich nicht in reellen Punkten. Confocale Kegelschnitte verschiedener Art schneiden sich immer in reellen Punkten senkrecht. In jedem Punkte der

Ebene schneiden sich zwei, zu einem in der Ebene gegebenen Kegelschnitte, confocale Kegelschnitte senkrecht.

Man erhält aus der Gleichung des Tangentenkegels einer Oberfläche zweiter Ordnung (20), der vierzehnten Vorlesung, die Gleichung des Tangentenpaares an den Kegelschnitt, in welchem die Oberfläche von einer der Coordinatenebenen geschnitten wird, wenn man die auf dieser Ebene senkrechten Coordinaten gleich 0 setzt. Bildet man nach dieser Vorschrift die Gleichung des Tangentenpaares, welches von einem, durch seine Coordinaten β_0, β_1 gegebenen, Punkte an den, durch die erste Gleichung (8) gegebenen, Kegelschnitt gelegt ist, so erhält man:

$$(27)\quad \left\{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda}x+\frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda}y-1\right\}^2-E\left\{\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda}-1\right\}=0.$$

Mit Unterdrückung aller Glieder niederer Ordnung geht hieraus die Gleichung hervor:

$$\left\{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda}x+\frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda}y\right\}^2-E\left\{\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda}\right\}=0$$

des vom Coordinatenanfangspunkte ausgehenden, dem Tangentenpaare parallelen Linienpaares. Die Hauptaxen dieses Linienpaares, das sind diejenigen geraden Linien, welche die Winkel des Linienpaares halbiren, sind durch unsere Substitutionen (4) schon bestimmt, denn sie transformiren nach (22) auch den linken Theil der letzten Gleichung in die Quadrate der Variabeln.

Da aber unsere Substitutionen unabhängig von der Grösse λ bestimmt waren, so werden alle jene Linienpaare, welchen Werth auch λ annehme, dieselben Hauptaxen haben.

Uebertragen wir nun die an den genannten Linienpaaren gemachte Bemerkung auf die Tangentenpaare (27), von welchen wir besonders diejenigen hervorheben, welche an die confocalen Kegelschnitte gelegt sind, welche durch den gegebenen Punkt gehen, so haben wir den Satz:

Die Winkel, welche das von einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt gelegte Tangentenpaar bildet, werden halbirt von den beiden, durch

den gegebenen Punkt gelegten, zu dem gegebenen Kegelschnitte confocalen, Kegelschnitten.

Wenn ein Punkt in der Ebene durch seine rechtwinkligen Coordinaten β_0, β_1 bestimmt ist, so ist derselbe auch bestimmt als Schnittpunkt der beiden, mit einem gegebenen Kegelschnitte (8) confocalen, Kegelschnitte, welche durch ihn gehen. Es schneiden sich zwar die beiden confocalen Kegelschnitte in vier, gegen die Coordinatenaxen symmetrisch gelegenen, Punkten; allein mit passender Beschränkung, zum Beispiel, dass der Punkt nur liegen soll innerhalb des von den positiven Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkels, wird der Punkt durch die beiden, durch ihn gehenden, confocalen Kegelschnitte unzweideutig bestimmt sein. Man kann daher die beiden confocalen Kegelschnitte als die den Punkt bestimmenden Coordinaten ansehen. Die ihnen entsprechenden Werthe von λ gleich λ_0 und λ_1 führen den Namen der elliptischen Coordinaten des Punktes, dessen rechtwinklige Coordinaten sind β_0 und β_1.

Die beiden ersten Gleichungen (7), in welchen man α_0 und α_1 als constante Grössen zu betrachten hat, sind die Relationen zwischen den variabeln rechtwinkligen und den variabeln elliptischen Coordinaten. Ihre Auflösungen (10) drücken die rechtwinkligen durch die elliptischen Coordinaten aus.

Es genügt aber nicht, die Ausdrücke der rechtwinkligen Coordinaten durch die elliptischen zu kennen; in vielen Fällen braucht man auch die Differentiale der einen, ausgedrückt durch die anderen. Differentiirt man deshalb die beiden ersten Gleichungen (7), indem man die rechtwinkligen Coordinaten, gleich wie die elliptischen, als Variabeln betrachtet, so erhält man mit Rücksicht auf (23):

$$\frac{d\lambda_0}{2B_0^2} = \frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0},$$
$$\frac{d\lambda_1}{2B_1^2} = \frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1+\lambda_1}$$

und hieraus mit Berücksichtigung von (6):

$$(28) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{2B_0} &= a^0 d\beta_0 + b^0 d\beta_1, \\ \frac{d\lambda_1}{2B_1} &= a' d\beta_0 + b' d\beta_1. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Substitutionen (4), so sieht man, dass, wenn die Variabeln x, y die Werthe annehmen $x = d\beta_0$, $y = d\beta_1$, die anderen Variabeln die Werthe erhalten: $X = \frac{d\lambda_0}{2B_0}$, $Y = \frac{d\lambda_1}{2B_1}$. Es ist deshalb erlaubt, in den Substitutionen (4) und in allen Gleichungen, welche diese Substitutionen zu identischen Gleichungen machen, folgende gleichzeitige Veränderungen eintreten zu lassen:

$$(29) \quad \ldots \ldots \quad \begin{array}{c} ,, \quad x, \quad y, \quad X, \quad Y \\ ,, \text{ in } d\beta_0, \; d\beta_1, \; \frac{d\lambda_0}{2B_0}, \; \frac{d\lambda_1}{2B_1}. \end{array}$$

Von den durch diese Veränderungen aus den angegebenen Formeln hervorgehenden Differentialformeln heben wir die erste hervor, welche das Quadrat des Differentiales ds des Bogens irgend einer Curve ausdrückt:

$$(30) \quad \ldots \quad ds^2 = d\beta_0^2 + d\beta_1^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{B_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{B_1^2}\right\}.$$

Wenn wir der Bequemlichkeit wegen setzen:

$$(31) \quad \ldots \ldots \quad \begin{array}{r} L_0^2 = (\alpha_0 + \lambda_0)(\alpha_1 + \lambda_0), \\ -L_1^2 = (\alpha_0 + \lambda_1)(\alpha_1 + \lambda_1), \end{array}$$

so geht (30) mit Rücksicht auf (10) über in:

$$(32) \quad \ldots \ldots \quad ds^2 = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{L_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{L_1^2}\right\}.$$

Hieraus erhalten wir das Differentiale des Bogens des Kegelschnittes (8), von dem wir annehmen wollen, dass er eine Ellipse sei, indem wir $\lambda_0 = \lambda$ gleich einer Constanten setzen, deren Werth zwischen $-\alpha_1$ und ∞ liegt:

$$(33) \quad \ldots \ldots \quad ds = \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1},$$

und hieraus ergiebt sich die Länge s des Bogens der Ellipse (8):

$$(34) \quad \ldots \ldots \quad s = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1},$$

begrenzt von den beiden confocalen Hyperbeln, welchen die Werthe $\lambda_1 = \lambda_1^0$ und $\lambda_1 = \lambda_1'$ der elliptischen Coordinaten entsprechen. Nimmt man für die Grenzen des Integrals die Hyperbelgrenzen, so erhält man den vierten Theil des Umfanges U der genannten Ellipse, und demnach:

$$(35) \; \ldots\ldots \quad U = 2 \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \sqrt{(\lambda - \lambda_1)} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1}.$$

Die Bogenelemente da_0 und da_1 der confocalen Ellipsen und Hyperbeln erhalten wir aus (32):

$$(36) \; \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} da_0 &= \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1}, \\ da_1 &= \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_0}{L_0}, \end{aligned}$$

indem wir einmal λ_0, das andere Mal λ_1 constant setzen. Demnach wird, weil alle confocalen Ellipsen alle confocalen Hyperbeln senkrecht schneiden, das Element der von zwei confocalen Ellipsen und von zwei confocalen Hyperbeln eingeschlossenen Fläche:

$$(37) \; \ldots\ldots \quad da_0 \,.\, da_1 = \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)}{4} \frac{d\lambda_0}{L_0} \frac{d\lambda_1}{L_1}.$$

Durch doppelte Integration und Ausdehnung der Grenzen über sämmtliche, von der gegebenen Ellipse (8) eingeschlossenen, confocalen Ellipsen und über sämmtliche confocale Hyperbeln erhält man den vierten Theil des Flächeninhaltes I der gegebenen Ellipse. Man hat demnach:

$$(38) \; \ldots\ldots \quad I = \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \int_{-\alpha_1}^{\lambda} (\lambda_0 - \lambda_1) \frac{d\lambda_0}{L_0} \frac{d\lambda_1}{L_1}.$$

Einen einfacheren Ausdruck für den Flächeninhalt der gegebenen Ellipse (8) erhält man auf folgende Art. Man beschreibe um den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse mit dem Radius der grossen halben Axe einen Kreis:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_0 + \lambda} = 1.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Gleichung (8) der Ellipse zeigt, dass die Ordinate des Kreises sich zu der, derselben Abscisse entsprechenden, Ordinate der Ellipse verhält wie:

$$\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)} : \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)}.$$

In demselben Verhältnisse stehen auch die Flächenelemente k und i des Kreises und der Ellipse, welche begrenzt werden von zwei unendlich nahen Ordinaten. Man hat daher:

$$i = k \cdot \frac{\sqrt{(\alpha_1 + \lambda)}}{\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)}}.$$

Nimmt man die Summe aller Flächenelemente des Kreises und der Ellipse: $\Sigma k = K$ und $\Sigma i = I$, so erhält man:

$$I = K \cdot \frac{\sqrt{(\alpha_1 + \lambda)}}{\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)}}.$$

Da aber der Flächeninhalt K des Kreises ist: $K = \pi(\alpha_0 + \lambda)$, so hat man:

$$(39) \ldots\ldots \quad I = \pi\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)}\ \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)}$$

und daher mit Rücksicht auf (38):

$$(40) \quad \pi\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)}\ \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)} = \int\limits_{-\alpha_0}^{-\alpha_1}\int\limits_{-\alpha_1}^{\lambda} (\lambda_0 - \lambda_1)\frac{d\lambda_0}{L_0}\frac{d\lambda_1}{L_1},$$

welche Gleichung nach dem Vorhergehenden bewiesen ist für alle zwischen $-\alpha_1$ und ∞ gelegenen Werthe von λ und unter der Voraussetzung, dass $\alpha_0 > \alpha_1$.

Von den Differential-Formeln, welche aus den, in dem ersten Theile der gegenwärtigen Vorlesung entwickelten, Formeln durch die Veränderungen (29) hervorgehen, heben wir ferner die, der Gleichung (22) entsprechende, Formel hervor:

$$(41) \quad \left\{\frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0+\lambda} + \frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1+\lambda}\right\}^2 - E\left\{\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}\right\} = \frac{E}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{(\lambda_0 - \lambda)B_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda)B_1^2}\right\},$$

um auch ihr eine geometrische Bedeutung unterzulegen.

Zu diesem Zwecke erinnern wir an die Gleichung (27) des von dem Punkte β_0, β_1 an den gegebenen Kegelschnitt (8)

gelegten Tangentenpaares. Verlegt man, mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen, den Anfangspunkt des Coordinatensystemes in den genannten Punkt, so wird die Gleichung des Tangentenpaares rücksichtlich dieses Coordinatensystemes:

$$\left\{\frac{\beta_0 x}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1 y}{\alpha_1+\lambda}\right\}^2-E\left\{\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda}\right\}=0,$$

woraus die Differentialgleichung desselben Tangentenpaares, rücksichtlich des ursprünglichen Coordinatensystems, hervorgeht:

$$(42)\qquad \left\{\frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1+\lambda}\right\}^2-E\left\{\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}\right\}=0,$$

und in elliptische Coordinaten durch (41) übertragen:

$$(43)\ \ldots\ldots\quad \frac{d\lambda_0^2}{(\lambda_0-\lambda)B_0^2}-\frac{d\lambda_1^2}{(\lambda-\lambda_1)B_1^2}=0.$$

Zerlegt man diese Gleichung in ihre Factoren und setzt jeden einzelnen gleich 0, so erhält man die Differential-Gleichungen der von dem Punkte β_0, β_1 an die gegebene Ellipse (8) gelegten Tangenten:

$$\frac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,B_0}-\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,B_1}=0,$$

$$\frac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,B_0}+\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,B_1}=0,$$

oder, wenn man die übersichtlichere Bezeichnung (31) einführt:

$$(44)\ \ldots\quad \begin{aligned}\frac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,L_0}-\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,L_1}=0,\\ \frac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,L_0}+\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,L_1}=0.\end{aligned}$$

Um nun die Länge s der Tangente auszudrücken, setzen wir in Gleichung (32) den Werth von $d\lambda_0$ aus einer der Gleichungen (44) ein, wodurch wir für jede der beiden Tangenten erhalten:

$$ds=\frac{(\lambda_0-\lambda_1)\,.\,d\lambda_1}{2\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,L_1}$$

oder:

$$ds = \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)} \,.\, d\lambda_1}{2 L_1} + \frac{(\lambda_0 - \lambda) \,.\, d\lambda_1}{2\sqrt{(\lambda - \lambda_1)} \,.\, L_1}.$$

Bezeichnen wir aber mit s_0 die Länge der ersten Tangente (44) und mit s_1 die Länge der zweiten Tangente, von den Punkten an gerechnet, wo sie die gegebene Ellipse (8) berühren, bis zu ihrem Schnittpunkte β_0, β_1, oder in elliptischen Coordinaten λ_0, λ_1, so erhalten wir mit Berücksichtigung ihrer Differentialgleichungen (44):

$$(45) \quad \ldots \quad \begin{aligned} ds_0 &= \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2 L_1}\, d\lambda_1 + \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2 L_0}\, d\lambda_0, \\ ds_1 &= \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2 L_1}\, d\lambda_1 - \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2 L_0}\, d\lambda_0, \end{aligned}$$

und hieraus durch Integration:

$$(46) \quad \ldots \quad \begin{aligned} s_0 &= \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2 L_1}\, d\lambda_1 + \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2 L_0}\, d\lambda_0, \\ s_1 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_1'} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2 L_1}\, d\lambda_1 - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2 L_0}\, d\lambda_0, \end{aligned}$$

wenn wir annehmen, dass λ_1^0 und λ_1' die Werthe der elliptischen Coordinate λ_1 seien, welche den Berührungspunkten der Tangenten der Ellipse (8) entsprechen.

Durch Addition der beiden Gleichungen (46) erhält man:

$$(47) \quad s_0 + s_1 = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2 L_1}\, d\lambda_1 + 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2 L_0}\, d\lambda_0,$$

und wenn man hiervon den, von den beiden Berührungspunkten begrenzten, durch (34) ausgedrückten, Bogen der gegebenen Ellipse (8) abzieht:

$$(48) \quad \ldots \quad s_0 + s_1 - s = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2 L_0}\, d\lambda_0.$$

Da dieser Ausdruck aber die zweite elliptische Coordinate λ_1 des Punktes β_0, β_1 nicht enthält, so bleibt er unverändert

für alle Punkte β_0, β_1, für welche λ_0 eine constante Grösse ist, das heisst, für alle auf einer Ellipse liegenden Punkte, welche mit der gegebenen Ellipse confocal ist. Dem hierdurch bewiesenen Satze können wir folgenden Ausdruck geben:

Wenn man um eine gegebene Ellipse einen geschlossenen Faden schlingt, und diesen durch einen Stift in der Ebene der Ellipse spannt, so beschreibt der Stift bei seiner Bewegung eine mit der gegebenen Ellipse confocale Ellipse.

Betrachten wir schliesslich noch den Grenzfall, wenn der Punkt β_0, β_1 der gegebenen Ellipse (8) unendlich nahe rückt, In diesem Falle werden alle Differenzen $\lambda_1' - \lambda_1^0$ und $\lambda_0 - \lambda$ der Grenzen der beiden Integrale in (47) unendlich kleine Grössen und mit ihnen auch die Integrale. Da aber der Factor $\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}$ unter dem zweiten Integralzeichen für alle zwischen den Grenzen des Integrals liegenden Werthe von λ_0 ebenfalls unendlich klein wird, während der entsprechende Factor $\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}$ des ersten Integrales für alle Werthe von λ_1 zwischen den Grenzen des Integrals endlich bleibt, so sieht man, dass in dem Grenzfalle das zweite Integral gegen das erste verschwindet, und dass die Ausdrücke (47) und (34) in einander übergehen.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung. Confocale Oberflächen zweiter Ordnung und elliptische Raumcoordinaten.

Man hat am Ende der neunzehnten Vorlesung gesehen, wie das Problem der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung rein algebraisch sich so ausdrücken lässt:

Die linearen Substitutionen zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2,$$

zu identischen Gleichungen machen, wenn die Function $\varphi(x, y, z)$ gegeben ist in der Form:

$$(3) \quad \varphi(x, y, z) = (\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2).$$

Indem wir dieses Problem wieder aufnehmen, werden wir annehmen, dass die linearen Substitutionen, welche die Transformationen (1) und (2) bewirken, mit ihren Auflösungen seien:

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= a^0 X + a' Y + a'' Z, & X &= a^0 x + b^0 y + c^0 z, \\ y &= b^0 X + b' Y + b'' Z, & Y &= a' x + b' y + c' z, \\ z &= c^0 X + c' Y + c'' Z, & Z &= a'' x + b'' y + c'' z. \end{aligned}$$

Dass die aufgelösten Substitutionen gerade die angegebene Form haben, folgt, wie man in dem zweiten Theile der achtzehnten Vorlesung gesehen hat, aus der, durch die Substitutionen identischen, Gleichung (1). Aus dieser Gleichung gehen aber alle Formeln hervor, die wir in dem zweiten Theile der genannten Vorlesung entwickelt haben. Es genügt hier, auf sie nur hinzuweisen, mit der Bemerkung, dass man überall für a, b, c zu setzen hat a^0, b^0, c^0, um für unser Problem gültige Formeln zu erhalten.

Die Werthe der 9 Substitutionscoefficienten werden wir bestimmen, indem wir die drei Grössen B_0, B_1, B_2 einführen, welche durch die folgenden drei Gleichungen oder durch ihre Auflösungen definirt sind:

$$(5)\quad \begin{aligned} \beta_0 &= a^0 B_0 + a' B_1 + a'' B_2, & B_0 &= a^0 \beta_0 + b^0 \beta_1 + c^0 \beta_2, \\ \beta_1 &= b^0 B_0 + b' B_1 + b'' B_2, & B_1 &= a' \beta_0 + b' \beta_1 + c' \beta_2, \\ \beta_2 &= c^0 B_0 + c' B_1 + c'' B_2, & B_2 &= a'' \beta_0 + b'' \beta_1 + c'' \beta_2. \end{aligned}$$

Alsdann gehen aus der durch die Substitutionen identischen Gleichung (2) folgende 9 Gleichungen hervor:

$$(6)\quad \begin{aligned} a^0 &= \frac{\beta_0 B_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & b^0 &= \frac{\beta_1 B_0}{\alpha_1 + \lambda_0}, & c^0 &= \frac{\beta_2 B_0}{\alpha_2 + \lambda_0}, \\ a' &= \frac{\beta_0 B_1}{\alpha_0 + \lambda_1}, & b' &= \frac{\beta_1 B_1}{\alpha_1 + \lambda_1}, & c' &= \frac{\beta_2 B_1}{\alpha_2 + \lambda_1}, \\ a'' &= \frac{\beta_0 B_2}{\alpha_0 + \lambda_2}, & b'' &= \frac{\beta_1 B_2}{\alpha_1 + \lambda_2}, & c'' &= \frac{\beta_2 B_2}{\alpha_2 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen erhält man, wenn man die durch die Substitutionen (4) identische Gleichung (2) partiell nach x differentiirt und hierauf $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, und zugleich $x = a^0$, $y = b^0$, $z = c^0$ setzt. In gleicher Weise erhält man die übrigen Gleichungen.

Die Substitutionscoefficienten sind in den Gleichungen (6) durch die sechs unbekannten Grössen B_0, B_1, B_2, λ_0, λ_1, λ_2 ausgedrückt. Um die Werthe der letzteren festzustellen, dienen die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} &= 1, & \frac{B_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{B_1^2}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{B_2^2}{\alpha_0+\lambda_2} &= 1, \\ \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_1} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_1} &= 1, & \frac{B_0^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{B_1^2}{\alpha_1+\lambda_1} + \frac{B_2^2}{\alpha_1+\lambda_2} &= 1, \\ \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_2} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_2} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_2} &= 1, & \frac{B_0^2}{\alpha_2+\lambda_0} + \frac{B_1^2}{\alpha_2+\lambda_1} + \frac{B_2^2}{\alpha_2+\lambda_2} &= 1, \end{aligned}$$

welche aus (6) dadurch hervorgehen, dass man die Horizontal-Gleichungen multiplicirt mit β_0, β_1, β_2 und mit Berücksichtigung von (5) addirt, oder dass man die Verticalgleichungen multiplicirt mit B_0, B_1, B_2 und addirt.

Die drei ersten Gleichungen drücken aus, dass die Unbekannten λ_0, λ_1, λ_2 die Wurzeln sind folgender in λ kubischen

Gleichung, die drei anderen, dass die bekannten Grössen α_0, α_1, α_2 sich als die Wurzeln folgender kubischen Gleichung in α betrachten lassen:

$$(8) \qquad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha+\lambda_1}+\frac{B_2^2}{\alpha+\lambda_2}=1.$$

Nach Feststellung der Wurzeln der ersten kubischen Gleichung (8) bleibt noch übrig, die Werthe der Quadrate der letzten Unbekannten B_0, B_1, B_2 durch Auflösung des zweiten Systemes Gleichungen (7) zu berechnen. Diese Berechnung geschieht am einfachsten in folgender Art:

Da λ_0, λ_1, λ_2 und α_0, α_1, α_2 die Wurzeln der kubischen Gleichungen (8) sind, so hat man identisch:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda)-\beta_0^2(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda) \\ &\quad -\beta_1^2(\alpha_2+\lambda)(\alpha_0+\lambda)-\beta_2^2(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda) \\ &\quad =(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2), \\ &(\alpha+\lambda_0)(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_2)-B_0^2(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_2) \\ &\quad -B_1^2(\alpha+\lambda_2)(\alpha+\lambda_0)-B_2^2(\alpha+\lambda_0)(\alpha+\lambda_1) \\ &\quad =(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2). \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für λ nach einander $-\alpha_0$, $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, und für α ebenso $-\lambda_0$, $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, so erhält man:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \beta_0^2&=\frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)}, & B_0^2&=\frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_0)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)}, \\ \beta_1^2&=\frac{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_0)}, & B_1^2&=\frac{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_0)}, \\ \beta_2^2&=\frac{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)}, & B_2^2&=\frac{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_1)}. \end{aligned}$$

Aus der in λ kubischen Gleichung (8) ersieht man, wenn man voraussetzt:

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha_0>\alpha_1>\alpha_2,$$

dass, welche Werthe auch die Grössen β_0, β_1, β_2 haben mögen, die Wurzeln jener Gleichung liegen:

die grösste Wurzel λ_0 zwischen $+\infty$ und $-\alpha_2$,
(12) die mittlere Wurzel λ_1 zwischen $-\alpha_2$ und $-\alpha_1$,
die kleinste Wurzel λ_2 zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_0$.

Deshalb sind auch die Ausdrücke B_0^2, B_1^2, B_2^2 in (10) sämmtlich positiv und die Ausdrücke (6) der Substitutionscoefficienten reell.

Von den angeführten Formeln braucht man nur die eine Hälfte aufzustellen, die andere ergiebt sich von selbst nach dem Principe, welches wir jetzt entwickeln wollen.

Durch Multiplication der drei ersten Gleichungen (5) mit x, y, z und Addition erhält man, mit Rücksicht auf (4):

$$(13) \quad \ldots \quad \beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z = B_0 X + B_1 Y + B_2 Z.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung geht aber die Gleichung (2):

$$(14) \quad (\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$$

über in:

$$(15) \quad (B_0 X + B_1 Y + B_2 Z)^2 - (\lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2) = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2.$$

Wenn demnach die Substitutionen (4) die Gleichungen (1) und (14) zu identischen Gleichungen machen, und die Substitutionen dadurch bestimmt sind, so machen die Auflösungen dieser Substitutionen die Gleichungen (1) und (15) zu identischen Gleichungen und sind ebenfalls bestimmt. Daraus ergiebt sich aber folgende Regel zur Ableitung neuer Formeln:

Es ist erlaubt, in allen Formeln, die aus den Substitutionen (4) hervorgehen, welche die Gleichungen (1) und (2) zu identischen Gleichungen machen, folgende gleichzeitige Vertauschungen zu machen:

$$(16) \quad \begin{array}{l} ,, \; x, \; y, \; z; \quad \alpha_0, \; \alpha_1, \; \alpha_2; \quad \beta_0, \; \beta_1, \; \beta_2; \quad b^0, \; c^0, \; c'. \\ ,, \; X, \; Y, \; Z; \quad \lambda_0, \; \lambda_1, \; \lambda_2; \quad B_0, \; B_1, \; B_2; \quad a', \; a'', \; b''. \end{array}$$

Zieht man die mit einem willkürlichen Factor λ multiplicirte Gleichung (1) ab von (14), so erhält man:

$$(17)\quad \begin{aligned}\{\beta_0 x+\beta_1 y+\beta_2 z\}^2-\{(\alpha_0+\lambda)x^2+(\alpha_1+\lambda)y^2+(\alpha_2+\lambda)z^2\}\\ =(\lambda_0-\lambda)X^2+(\lambda_1-\lambda)Y^2+(\lambda_2-\lambda)Z^2.\end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichung an die Stelle der Gleichung (2) des Problemes setzt, so sieht man, dass man in allen zur Lösung des Problemes entwickelten Formeln folgende gleichzeitige Veränderungen eintreten lassen kann:

$$(18)\quad \begin{array}{lllllll} ,, & \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2; & \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2; \\ ,,\ \text{in} & \alpha_0+\lambda, & \alpha_1+\lambda, & \alpha_2+\lambda; & \lambda_0-\lambda, & \lambda_1-\lambda, & \lambda_2-\lambda.\end{array}$$

Ein drittes Prinzip, nach welchem die zur Auflösung des Problemes dienlichen Formeln verändert werden können, ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung:

Setzt man, um die reciproke Function $\Phi(u, v, w)$ der in (3) gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$ zu bestimmen, nach Vorschrift von (25) der siebenten Vorlesung:

$$u=\tfrac{1}{2}\varphi'(x), \quad v=\tfrac{1}{2}\varphi'(y), \quad w=\tfrac{1}{2}\varphi'(z),$$

so erhält man nach (27) derselben Vorlesung die Auflösungen dieser linearen Gleichungen:

$$x=\tfrac{1}{2}\Phi'(u), \quad y=\tfrac{1}{2}\Phi'(v), \quad z=\tfrac{1}{2}\Phi'(w),$$

und die reciproke Function selber wird:

$$\Phi(u, v, w)=\tfrac{1}{2}\{u\Phi'(u)+v\Phi'(v)+w\Phi'(w)\}.$$

Die hier angedeuteten algebraischen Operationen zur Bestimmung der reciproken Function $\Phi(u, v, w)$ führen wir am einfachsten in folgender Art durch.

Wir setzen, um abzukürzen:

$$\beta_0 x+\beta_1 y+\beta_2 z=B,$$
$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2}-1=\varepsilon.$$

Alsdann sind die drei Gleichungen aufzulösen:

$$\begin{aligned}u&=\tfrac{1}{2}\varphi'(x)=\beta_0 B-\alpha_0 x,\\ v&=\tfrac{1}{2}\varphi'(y)=\beta_1 B-\alpha_1 y,\\ w&=\tfrac{1}{2}\varphi'(z)=\beta_2 B-\alpha_2 z.\end{aligned}$$

Multiplicirt man dieselben mit $\frac{\beta_0}{\alpha_0}, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ und addirt, so erhält man:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} u + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \frac{\beta_2}{\alpha_2} w = (\varepsilon + 1) B - B,$$

und hieraus:

$$B = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} u + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \frac{\beta_2}{\alpha_2} w \right).$$

Man erhält demnach die gesuchten Auflösungen, wenn man in den so dargestellten drei Gleichungen:

$$x = \frac{\beta_0}{\alpha_0} B - \frac{1}{\alpha_0} u,$$

$$y = \frac{\beta_1}{\alpha_1} B - \frac{1}{\alpha_1} v,$$

$$z = \frac{\beta_2}{\alpha_2} B - \frac{1}{\alpha_2} w$$

für B den zuletzt gegebenen Werth setzt. Durch Multiplication dieser drei Gleichungen mit u, v, w und Addition derselben erhält man dann die gesuchte reciproke Function:

$$(19) \quad \Phi(u, v, w) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} u + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \frac{\beta_2}{\alpha_2} w \right)^2 - \left(\frac{u^2}{\alpha_0} + \frac{v^2}{\alpha_1} + \frac{w^2}{\alpha_2} \right),$$

in welcher (ε) die Bedeutung hat:

$$(20) \; \ldots\ldots \quad \varepsilon = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} - 1.$$

Hier tritt nun der Satz (25) der zwanzigsten Vorlesung in Wirksamkeit, nach welchem unsere Substitutionen (4), welche entsprechen den Substitutionen (1)—(4) dort, die Transformation ergeben:

$$(21) \quad \begin{aligned} \varepsilon \Phi(x, y, z) &= \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} x + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y + \frac{\beta_2}{\alpha_2} z \right)^2 - \varepsilon \left(\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1} + \frac{z^2}{\alpha_2} \right) \\ &= \varepsilon \left(\frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2} \right). \end{aligned}$$

Da man diese Gleichung mit der Gleichung (2) des Problems vertauschen kann, ohne die Substitutionen (4) zu ändern, so sieht man, dass es erlaubt ist, in allen unseren Formeln folgende Veränderungen zu machen:

$$(22)\quad \begin{array}{l} ,,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2;\quad B_0,\quad B_1,\quad B_2 \\ ,,\ \text{in}\ \frac{\beta_0}{\alpha_0},\ \frac{\beta_1}{\alpha_1},\ \frac{\beta_2}{\alpha_2};\ \ \frac{\varepsilon}{\alpha_0},\ \frac{\varepsilon}{\alpha_1},\ \frac{\varepsilon}{\alpha_2};\ \ \frac{\varepsilon}{\lambda_0},\ \frac{\varepsilon}{\lambda_1},\ \frac{\varepsilon}{\lambda_2};\ \ \frac{\varepsilon B_0}{\lambda_0},\ \frac{\varepsilon B_1}{\lambda_1},\ \frac{\varepsilon B_2}{\lambda_2}. \end{array}$$

Denn da die Werthe der neun Substitutionscoefficienten (6) sich durch die ersten von diesen Aenderungen nicht ändern dürfen, so müssen die drei letzten Grössen B_0, B_1, B_2 eben die angegebenen Veränderungen erhalten.

Die Veränderungen (18) in (21) lassen, wenn man setzt:

$$(23)\ \ldots\ldots\quad E = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda} - 1,$$

folgende durch die Substitutionen (4) in λ identische Gleichung hervorgehen:

$$(24)\quad \begin{array}{l} \left(\frac{\beta_0 x}{\alpha_0+\lambda} + \frac{\beta_1 y}{\alpha_1+\lambda} + \frac{\beta_2 z}{\alpha_2+\lambda}\right)^2 - E\left(\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{y^2}{\alpha_1+\lambda} + \frac{z^2}{\alpha_2+\lambda}\right) \\ \qquad + E\left(\frac{X^2}{\lambda_0-\lambda} + \frac{Y^2}{\lambda_1-\lambda} + \frac{Z^2}{\lambda_2-\lambda}\right). \end{array}$$

An das Vorhergehende reiht sich ein System eleganter Formeln an, welches, zu ferneren Transformationen dienlich, sich fast ohne alle Rechnung sofort hinschreiben lässt.

Setzt man die Werthe der Substitutionscoefficienten (6) in (16) der achtzehnten Vorlesung ein, so erhält man:

$$(25)\ \ldots\quad \begin{array}{l} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)^2} = \frac{1}{B_0^2}, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)^2} = \frac{1}{B_1^2}, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)^2} = \frac{1}{B_2^2}. \end{array}$$

$$(26)\quad \begin{array}{l} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)} = 0, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda_0)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_0)} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_0)} = 0, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)} = 0. \end{array}$$

Die erste Gleichung (21) der achtzehnten Vorlesung

$a'b'' - a''b' = c^0$, sowie auch jede andere des Systemes, geht in gleicher Weise mit Berücksichtigung von (10) über in:

$$(27) \quad \ldots \quad B_0 B_1 B_2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_1) + \beta_0 \beta_1 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1) = 0.$$

Macht man in den drei ersten Gleichungen (7) die Aenderungen (22) und hierauf die Aenderungen (18), so erhält man:

$$(28) \quad \begin{aligned}
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda)} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda)} &= \frac{E}{\lambda_0-\lambda}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda)} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda)} &= \frac{E}{\lambda_1-\lambda}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda)} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda)} &= \frac{E}{\lambda_2-\lambda},
\end{aligned}$$

Differentiirt man diese in λ identischen Gleichungen nach λ und setzt hierauf für λ entweder λ_0 oder λ_1 oder λ_2, so erhält man mit Rücksicht auf (25) und (7):

$$(29) \quad \begin{aligned}
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_0)^2} &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)B_0^2}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_0)^2} &= \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_0)B_0^2}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_1)^2} &= \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)B_1^2}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)^2} &= \frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)B_1^2}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_2)^2} &= \frac{1}{(\lambda_0-\lambda_2)B_2^2}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)^2} &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)B_2^2}.
\end{aligned}$$

Wenn man die Grössen B_0, B_1, B_2 als Functionen von α_0, α_1, α_2 und λ_0, λ_1, λ_2 betrachtet, wie sie durch (10) ausgedrückt sind, und die Logarithmen dieser Ausdrücke partiell differentiirt nach λ_0 oder λ_1 oder λ_2, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{B_0}\frac{\partial B_0}{\partial \lambda_0} &= \frac{1}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_0}, \\
\frac{2}{B_1}\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_1} &= \frac{1}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}, \\
\frac{2}{B_2}\frac{\partial B_2}{\partial \lambda_2} &= \frac{1}{\alpha_0+\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Da man aber ähnliche Ausdrücke erhält durch zweimalige Differentiation der so dargestellten identischen Gleichung (9):

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda}-1=-\frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda)}$$

nach λ und Veränderung dieser variabeln Grösse in λ_0, λ_1, λ_2, nämlich:

$$\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^3}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)^3}=$$
$$=\frac{1}{B_0^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{1}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{1}{\alpha_2+\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_0}\right\},$$

$$\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^3}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)^3}=$$
$$=\frac{1}{B_1^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_1}+\frac{1}{\alpha_1+\lambda_1}+\frac{1}{\alpha_2+\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}\right\},$$

$$\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)^3}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)^3}=$$
$$=\frac{1}{B_2^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_2}+\frac{1}{\alpha_1+\lambda_2}+\frac{1}{\alpha_2+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_0-\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\right\},$$

so ergiebt sich aus dem Vergleich dieser drei Gleichungen mit den drei vorhergehenden:

$$(30)\ \cdot\ \cdot\quad \begin{aligned}\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^3}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)^3}&=\frac{2}{B_0^3}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial\lambda_0},\\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^3}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)^3}&=\frac{2}{B_1^3}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_1},\\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)^3}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)^3}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)^3}&=\frac{2}{B_2^3}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial\lambda_2}.\end{aligned}$$

Um endlich dieses, zum grössten Theil von Jacobi entwickelte, System von Formeln zu vervollständigen, fügen wir noch folgende hinzu:

$$(31)\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)}=0,$$

welche sich aus den drei ersten Gleichungen (10) ohne Schwierigkeit ergiebt.

Allein durch Zusammenstellung der angegebenen Formeln geht folgendes System hervor, wenn man berücksichtigt, dass auf Grund von (10) ist:

$$2 \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} = \frac{B_1}{\lambda_1 - \lambda_0}, \qquad 2 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} = \frac{B_2}{\lambda_2 - \lambda_0},$$

nämlich:

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{a^0 x}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{b^0 y}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{c^0 z}{\alpha_2 + \lambda_0} &= \frac{2}{B_0} \cdot \frac{\partial B_0}{\partial \lambda_0} X + \frac{2}{B_0} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} Y + \frac{2}{B_0} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} Z, \\ \frac{a' x}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{b' y}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{c' z}{\alpha_2 + \lambda_0} &= \frac{2}{B_0} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} X - \frac{2}{B_1} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} Y, \\ \frac{a'' x}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{b'' y}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{c'' z}{\alpha_2 + \lambda_0} &= \frac{2}{B_0} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} X - \frac{2}{B_2} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} Z. \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen wird erhalten, wenn man die erste Gleichung (30) mit $B_0 B_0 X$, die erste Gleichung (29) mit $B_0 B_1 Y$, die zweite Gleichung (29) mit $B_0 B_2 Z$ multiplicirt und alle drei Gleichungen unter Berücksichtigung von (6) und (4) addirt. Ebenso wird die zweite Gleichung (32) erhalten, wenn man die erste Gleichung (29) mit $B_0 B_1 X$, die vierte Gleichung (29) mit $B_1 B_1 Y$, die Gleichung (31) mit $B_2 B_1 Z$ multiplicirt und addirt. Die dritte Gleichung (32) erhält man endlich, wenn man die zweite Gleichung (29) mit $B_0 B_2 X$, die Gleichung (31) mit $B_1 B_2 Y$, die fünfte Gleichung (29) mit $B_2 B_2 Z$ multiplicirt und addirt.

Multiplicirt man die drei Gleichungen (32) der Reihe nach mit X, Y, Z und addirt, unter Berücksichtigung von (4), so erhält man:

$$(33) \quad \begin{aligned} &\frac{x^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{y^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{z^2}{\alpha_2 + \lambda_0} = \\ &= \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial \lambda_0} X^2 - \frac{2}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} Y^2 - \frac{2}{B_2} \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} Z^2 + \frac{4}{B_0} \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} XY + \frac{4}{B_0} \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} XZ, \end{aligned}$$

eine Gleichung, welche durch die Substitutionen (4) zugleich mit (1) und (2) eine identische wird.

Wir erwähnen ferner des Systemes Gleichungen, welches aus (32) dadurch hervorgeht, dass man den Variablen die Werthe zuertheilt: $x = \beta_0$, $y = \beta_1$, $z = \beta_2$ und demnach $X = B_0$, $Y = B_1$, $Z = B_2$, nämlich:

$$(34) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \frac{a^0 \beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{b^0 \beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{c^0 \beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} &= \frac{1}{B_0}, \\ \frac{a' \beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{b' \beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{c' \beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} &= 0, \\ \frac{a'' \beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{b'' \beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{c'' \beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} &= 0. \end{aligned}$$

Um die erste von diesen Gleichungen in der angegebenen Form nachzuweisen, bedarf es freilich noch der Reduction $\frac{\partial(B_0^2 + B_1^2 + B_2^2)}{\partial \lambda_0} = 1$, die sich aber umgehen lässt, wenn man an die Stelle der ersten Gleichung setzt die erste Gleichung (25), welche mit Berücksichtigung von (6) ohne Weiteres die gewünschte Gestalt annimmt.

Wir bringen endlich die Substitutionen (4) in Erinnerung:

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} a^0 x + b^0 y + c^0 z &= X, \\ a' x + b' y + c' z &= Y, \\ a'' x + b'' y + c'' z &= Z, \end{aligned}$$

um sie mit den beiden vorhergehenden Systemen Gleichungen zu einer neuen Gleichung zusammen zu stellen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke die linken Theile der Gleichungen (34) als die Componenten der ersten Horizontalreihe einer Determinante K, die linken Theile der Gleichungen (35) als die der zweiten Horizontalreihe und die linken Theile der Gleichungen (32) als die der dritten Horizontalreihe derselben Determinante, so haben wir nach Satz (31) der siebenten Vorlesung von der Multiplication der Determinanten:

$$(36) \quad \ldots\ldots \quad K = \begin{vmatrix} \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \\ x, & y, & z, \\ \frac{x}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{y}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{z}{\alpha_2 + \lambda_0} \end{vmatrix}.$$

Denn der zweite Factor, die Determinante Δ, gebildet aus den neun Substitutionscoefficienten, ist nach (20) der achtzehnten Vorlesung $= 1$.

Wenn wir in gleicher Weise die Determinante K aus den rechten Theilen der angegebenen Gleichungen bilden, so erhalten wir mit Rücksicht auf (14) der siebenten Vorlesung:

$$(37) \quad K = \frac{1}{B_0} \begin{vmatrix} Y, & Z, \\ \frac{2}{B_0} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} X - \frac{2}{B_1} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} Y, & \frac{2}{B_0} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} X - \frac{2}{B_1} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} Z \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir diese Determinante entwickeln und für die

partiellen Differentialquotienten die oben angegebenen Werthe einsetzen:

$$(38)\quad K = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_1)B_0^2}\left\{(\lambda_1 - \lambda_2)B_0 YZ + (\lambda_2 - \lambda_0)B_1 ZX + (\lambda_0 - \lambda_1)B_2 XY\right\}.$$

Wir haben demnach die durch die Substitutionen (4) identische Gleichung:

$$(39)\ \ldots\ldots \begin{vmatrix} \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \\ x, & y, & z, \\ \frac{x}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{y}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{z}{\alpha_2 + \lambda_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_1)B_0^2}\left\{(\lambda_1 - \lambda_2)B_0 YZ + (\lambda_2 - \lambda_0)B_1 ZX + (\lambda_0 - \lambda_1)B_2 XY\right\}.$$

Diese Gleichung ist im Grunde nichts Neues. Denn sie führt, vollständig entwickelt, auf die Gleichung (55) der achtzehnten Vorlesung zurück. Sie ist aber von Bedeutung wegen der Form, in der sie hier auftritt.

Wir gehen über zur geometrischen Interpretation einzelner Gleichungen, welche wir in dem Vorhergehenden entwickelt haben.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Grössen β_0, β_1, β_2 als die variabeln rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume. Unter dieser Voraussetzung stellt die erste Gleichung (8) eine auf ihre Hauptaxen bezogene Oberfläche zweiter Ordnung dar. Lässt man in ihr λ variiren, so erhält man ein ganzes System Oberflächen zweiter Ordnung von der Eigenschaft, dass ihre durch irgend zwei Hauptaxen gelegten Schnitte, welche, wie bekannt, Kegelschnitte sind, dieselben Brennpunkte haben. Solche Oberflächen nennt man c o n f o c a l e O b e r f l ä c h e n z w e i t e r O r d n u n g. Ihr analytischer Ausdruck ist die Gleichung (8) mit veränderlichem Werthe von λ.

Betrachten wir den Punkt im Raume als einen gegebenen durch seine Coordinaten β_0, β_1, β_2, so beweist das erste System Gleichungen (7), dass durch den gegebenen Punkt drei verschiedene confocale Oberflächen hindurchgehen. Die eine von diesen Oberflächen ist ein Ellipsoid, weil alle drei

Nenner in der ersten Gleichung positiv sind. Die zweite Oberfläche ist ein erstes Hyperboloid, weil in der zweiten Gleichung der dritte Nenner allein negativ ist. Die dritte Oberfläche ist ein Hyperboloid der zweiten Art, weil die beiden letzten Nenner in der dritten Gleichung negativ sind, während der erste positiv ist.

Jede von den drei Arten confocaler Oberflächen erfüllt den ganzen unendlichen Raum, weil für beliebige Werthe der Coordinaten β_0, β_1, β_2 immer Wurzeln der kubischen Gleichung (8) gefunden werden, welche zwischen den in (12) angegebenen Grenzen liegen.

Lässt man λ abnehmen von ∞ bis $-\alpha_2$, so wird das für $\lambda = \infty$ unendlich grosse Ellipsoid immer kleiner, bis es endlich in die Fläche der Ellipse fällt, welche durch die Gleichung ausgedrückt ist:

$$(40) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 - \alpha_2} = 1.$$

Diese Fläche bildet die Grenze zwischen den Ellipsoiden und den Hyperboloiden der ersten Art. Das Hyperboloid der ersten Art in dieser Grenze fällt zusammen mit dem Theile der $\beta_0\beta_1$ Ebene, welcher von der genannten Ellipse ausgeschlossen ist. Nimmt λ weiter ab von $-\alpha_2$ bis $-\alpha_1$, so bildet in der letzten Grenze die Fläche der in der $\beta_0\beta_2$ Ebene liegenden Hyperbel:

$$(41) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 - \alpha_1} - \frac{\beta_2^2}{\alpha_1 - \alpha_2} = 1$$

die Grenzen der Hyperboloide der ersten Art und der Hyperboloide der zweiten Art. Die andere Grenze der Hyperboloide der zweiten Art bildet die $\beta_1\beta_2$ Ebene.

Zwei confocale Oberflächen derselben Art können sich nicht in reellen Punkten schneiden, weil für einen reellen Schnittpunkt $\beta_0\,\beta_1\,\beta_2$ die Wurzeln der kubischen Gleichung (8) dann nicht zwischen den in (12) angegebenen Grenzen liegen würden.

Die Cosinus der Winkel, welche die in dem Punkte $\beta_0\,\beta_1\,\beta_2$ an die drei durch ihn gehenden confocalen Oberflächen (7)

gelegten Tangentenebenen mit den Coordinatenebenen bilden, verhalten sich bekanntlich wie:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0} : \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0},$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_1} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_1},$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_2} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_2} : \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_2}.$$

Die aus diesen 9 Ausdrücken zusammengesetzten Gleichungen (26) beweisen, dass die genannten Tangentenebenen auf einander senkrecht stehen. Diese Bemerkungen fassen wir in einem Satze zusammen, wie folgt:

Confocale Oberflächen derselben Art schneiden sich nicht. Confocale Oberflächen verschiedener Art schneiden sich immer in reellen Punkten senkrecht. In jedem Punkte des Raumes schneiden sich drei mit einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung confocale Oberflächen.

Wenn man, um die geometrische Bedeutung der Gleichung (24) festzustellen, von einem, durch seine Coordinaten $\beta_0 \beta_1 \beta_2$ gegebenen, Punkte im Raume an die Oberfläche (8) einen Tangentenkegel legt, so wird die Gleichung desselben nach Vorschrift von (20) der vierzehnten Vorlesung:

$$(42)\quad \left\{\frac{\beta_0 x}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1 y}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2 z}{\alpha_2+\lambda}-1\right\}^2-E\left\{\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{z^2}{\alpha_2+\lambda}-1\right\}=0.$$

Die Summe der Glieder zweiter Ordnung in dieser Gleichung ist gerade der Ausdruck, der in (24) durch die Substitutionen (4) transformirt worden ist. Durch diese Transformation ist zugleich das Problem der Hauptaxen des Tangentenkegels gelöset. Die Auflösung des Problemes ist in Betreff der neun Substitutionscoefficienten unabhängig von dem besonderen Werthe von λ in (42) und kann nach dem Vorhergehenden deshalb in Worten so wiedergegeben werden:

Die Tangentenkegel, welche von einem beliebig gegebenen Punkte als Spitze an confocale Ober-

flächen zweiter Ordnung gelegt werden, haben dieselben Richtungen ihrer Hauptaxen. Die durch den gegebenen Punkt gelegten Tangentenebenen an die drei, durch ihn gehenden, confocalen Oberflächen schneiden sich in den, allen jenen Tangentenkegeln gemeinschaftlichen, Hauptaxen.

Ein Punkt im Raume bestimmt die drei durch ihn gelegten, mit einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung confocalen, Oberflächen. Umgekehrt ist der Punkt bestimmt durch die drei confocalen Oberflächen, welche durch ihn gehen. Diese drei Oberflächen bestimmen zwar, indem sie sich schneiden, 8 verschiedene Punkte. Allein unter angemessener Beschränkung, zum Beispiel, dass der Punkt nur positive rechtwinklige Coordinaten habe, wird derselbe durch die drei durch ihn gehenden confocalen Oberflächen unzweideutig bestimmt sein. Wir werden in dem Folgenden diese Beschränkung festhalten. In dieser Voraussetzung bestimmen die rechtwinkligen Coordinaten β_0, β_1, β_2 eines beliebig gewählten Punktes p im Raume auch die drei Werthe von λ gleich λ_0, λ_1, λ_2, welche den drei, durch den Punkt gelegen, confocalen Oberflächen (7) entsprechen; und umgekehrt sind durch letztere die rechtwinkligen Coordinaten β_0, β_1, β_2 des Punktes p unzweideutig bestimmt.

Diese drei Wurzeln λ_0, λ_1, λ_2 der kubischen Gleichung (8) führen den Namen der elliptischen Coordinaten des Punktes im Raume, dessen rechtwinklige Coordinaten sind β_0, β_1, β_2. Ihr geometrisches Bild sind die drei, durch ihn gehenden, confocalen Oberflächen. Durch letztere wird in ihrer unendlich nahen Aufeinanderfolge der unendliche Raum zertheilt in rechtwinklige Parallelepipeden, wie dasselbe in ähnlicher Weise in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme durch die, den Coordinatenebenen parallelen, Ebenen in ihrer Aufeinanderfolge geschieht. Die Summe aller dieser Parallelepipeden, welche innerhalb einer gegebenen Oberfläche liegen, bestimmen den körperlichen Inhalt der Oberfläche.

Die Curven, in welchen sich zwei confocale Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, nennt man Krümmungscurven. Durch jeden Punkt des Raumes gehen also drei in dem Punkte

auf einander senkrecht stehende Krümmungscurven. Die eine schneidet sämmtliche confocale Ellipsoide, die zweite sämmtliche confocale Hyperboloide der ersten und die dritte sämmtliche confocale Hyperboloide der zweiten Art senkrecht. Krümmungscurven, welche auf einer und derselben confocalen Oberfläche zweiter Ordnung liegen, heissen Krümmungscurven dieser Oberfläche.

Die Krümmungscurven einer Oberfläche zweiter Ordnung kann man nach dem Vorhergehenden eintheilen in zwei Arten. Die Krümmungscurven der einen sowie die Krümmungscurven der anderen Art schneiden sich nicht. Dagegen schneiden die Krümmungscurven der einen Art die Krümmungscurven der anderen Art senkrecht.

Die Krümmungscurven einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung zertheilen demnach in ihrer unendlich nahen Aufeinanderfolge die Fläche in unendlich kleine Rechtecke. Die Summe dieser Rechtecke giebt den Flächeninhalt der Oberfläche.

Der analytische Ausdruck der Krümmungscurven in elliptischen Coordinaten sind zwei von den Gleichungen:

$$\lambda_0 = C_0, \quad \lambda_1 = C_1, \quad \lambda_2 = C_2,$$

in welchen die Werthe der Constanten C_0, C_1, C_2 beliebig zu wählen sind aus den in (12) angegebenen Grenzen. In rechtwinkligen Coordinaten sind es zwei von den in (7) angegebenen Gleichungen.

Zur Transformation eines, in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen, Ausdruckes in elliptische Coordinaten dienen die drei ersten Gleichungen (10). Zu den Differentialen der rechtwinkligen Coordinaten, ausgedrückt durch die elliptischen Coordinaten, gelangt man auf folgendem Wege.

Differentiirt man die Gleichungen (7), indem man sowohl die rechtwinkligen, als die elliptischen Coordinaten als variabel betrachtet, die Grössen α_0, α_1, α_2 aber als constant, so erhält man mit Berücksichtigung von (6):

$$(43) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{2B_0} &= a^0 d\beta_0 + b^0 d\beta_1 + c^0 d\beta_2, \\ \frac{d\lambda_1}{2B_1} &= a' d\beta_0 + b' d\beta_1 + c' d\beta_2, \\ \frac{d\lambda_2}{2B_2} &= a'' d\beta_0 + b'' d\beta_1 + c'' d\beta_2, \end{aligned}$$

Der Vergleich dieses Systemes Gleichungen mit den Substitutionen (4) erweiset folgenden Satz:

Es ist erlaubt, sowohl in den Substitutionen (4), als in allen den Gleichungen, welche diese Substitutionen zu identischen Gleichungen machen, folgende gleichzeitige Veränderungen zu machen:

$$(44)\ \dots \quad \begin{array}{lllllll} ,, & x, & y, & z; & X, & Y, & Z, \\ ,, & d\beta_0, & d\beta_1, & d\beta_2; & \frac{d\lambda_0}{2B_0}, & \frac{d\lambda_1}{2B_1}, & \frac{d\lambda_2}{2B_2}. \end{array}$$

Von den, durch diese Veränderungen aus den entwickelten Formeln hervorgehenden, Differentialformeln heben wir nur drei hervor. Erstens die aus (39) hervorgehende Differentialformel:

$$(45)\ \dots\dots \quad \begin{vmatrix} \frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0}, & \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0} \\ d\beta_0, & d\beta_1, & d\beta_2 \\ \frac{d\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0}, & \frac{d\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0}, & \frac{d\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0} \end{vmatrix} =$$

$$= Q\{(\lambda_1-\lambda_2)B_0^2 d\lambda_1 d\lambda_2 + (\lambda_2-\lambda_0)B_1^2 d\lambda_2 d\lambda_0 + (\lambda_0-\lambda_1)B_2^2 d\lambda_0 d\lambda_1\}$$

$$\text{wo } Q = \frac{1}{4B_0^3 B_1 B_2 (\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_1)}.$$

Auf die Bedeutung dieses Differentialausdruckes werden wir in einer späteren Vorlesung, die über die Krümmungscurven der Oberflächen im Allgemeinen handeln wird, wieder zurückkommen.

Wir führen zweitens die aus (33) hervorgehende Differential-Formel an:

$$(46)\ \dots\dots \quad \frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} =$$

$$= \frac{1}{2B_0^3}\frac{\partial B_0}{\partial\lambda_0} d\lambda_0^2 - \frac{1}{2B_1^3}\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_0} d\lambda_1^2 - \frac{1}{2B_2^3}\frac{\partial B_2}{\partial\lambda_0} d\lambda_2^2$$

$$+ \frac{1}{B_0^2 B_1}\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_0} d\lambda_0\, d\lambda_1 + \frac{1}{B_0^2 B_2}\frac{\partial B_2}{\partial\lambda_0} d\lambda_0\, d\lambda_2,$$

von welcher wir in der folgenden Vorlesung Gebrauch machen werden.

Drittens machen wir auf die aus Gleichung (1) hervorgehende Differential-Formel aufmerksam:

$$(47)\quad d\beta_0^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{B_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{B_1^2} + \frac{d\lambda_2^2}{B_2^2}\right\},$$

welche das Quadrat des Differentiales ds des Bogens irgend einer Curve darstellt, auf der einen Seite ausgedrückt durch rechtwinklige, auf der anderen Seite durch elliptische Coordinaten.

Setzen wir, um diesen Differential-Ausdruck übersichtlicher zu machen:

$$(48)\ \ldots\quad \begin{aligned} A_0^2 &= (\alpha_0 + \lambda_0)(\alpha_1 + \lambda_0)(\alpha_2 + \lambda_0), \\ -A_1^2 &= (\alpha_0 + \lambda_1)(\alpha_1 + \lambda_1)(\alpha_2 + \lambda_1), \\ A_2^2 &= (\alpha_0 + \lambda_2)(\alpha_1 + \lambda_2)(\alpha_2 + \lambda_2), \\ P &= (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2), \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$(49)\quad ds^2 = \frac{P}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)A_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{(\lambda_0 - \lambda_2)A_1^2} + \frac{d\lambda_2^2}{(\lambda_0 - \lambda_1)A_2^2}\right\}.$$

Hieraus ergeben sich die Differentiale da_0, da_1, da_2 der Längen der Krümmungscurven, welche auf den confocalen Ellipsoiden, den confocalen Hyperboloiden der ersten, den confocalen Hyperboloiden der zweiten Art senkrecht stehen:

$$(50)\ \ldots\ldots\quad \begin{aligned} da_0 &= \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{P}\,d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)}\,A_0}, \\ da_1 &= \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{P}\,d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\,A_1}, \\ da_2 &= \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{P}\,d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\,A_2}, \end{aligned}$$

und aus dem letzteren der ganze Umfang U der Krümmungscurve, in welcher sich das Ellipsoid $\lambda_0 = C_0$ und das Hyperboloid $\lambda_1 = C_1$ schneiden, durch Integration und Multiplication mit 4:

$$(51)\ \ldots\ldots\quad U = 2\int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)}}{A_2}\,d\lambda_2,$$

wobei zu bemerken ist, dass nur der eine Zweig der Krümmungscurve in Betracht gezogen worden ist.

Wenn λ_1 den Werth $-\alpha_2$ erhält, so fällt das diesem Werthe entsprechende Hyperboloid in die $\beta_0\beta_1$ Ebene des Coordinatensystems, und die in Rede stehende Krümmungscurve geht über in den Kegelschnitt, in welchem das Ellipsoid von der $\beta_0\beta_1$ Ebene geschnitten wird. Deshalb geht auch der angegebene Ausdruck U in diesem Falle über in den Ausdruck (35) der vorhergehenden Vorlesung, wenn man überdies $\lambda_0 = \lambda$ setzt.

Wenn man die Bogenelemente da_1 und da_2 multiplicirt, so erhält man das Flächenelement dF des Ellipsoids $\lambda_0 = C_0$:

$$(52) \ldots \quad dF = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{A_1 A_2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\,,$$

woraus durch doppelte Integration und Multiplication mit 8 der ganze Flächeninhalt F des Ellipsoides $\lambda_0 = C_0$ hervorgeht:

$$(53) \ldots \quad F = 2\int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1}\int_{-\alpha_1}^{-\alpha_2} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{A_1 A_2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2.$$

Um diese Formel zu prüfen, setzen wir $\lambda_0 = -\alpha_2$, in welchem Falle F den doppelten Flächeninhalt der Ellipse (40) geben muss, deren einfacher Flächeninhalt I aus (38) der vorhergehenden Vorlesung erhalten wird, wenn man $\lambda = -\alpha_2$ setzt. Man sieht aber in der That, dass, für $\lambda = \lambda_0 = -\alpha_2$, wenn man die gleichen Factoren des Zählers und Nenners in F unterdrückt, wird:

$$2I = F.$$

Man erhält endlich das Körperelement dE, wenn man die Bogenelemente da_0, da_1, da_2 multiplicirt:

$$(54) \ldots \quad dE = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{A_0 A_1 A_2}\, d\lambda_0\, d\lambda_1\, d\lambda_2\,,$$

woraus durch dreifache Integration und Multiplication mit 8 der kubische Inhalt E des Ellipsoides $\lambda_0 = C_0$ hervorgeht:

$$(55) \qquad E = \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \int_{-\alpha_1}^{-\alpha_2} \int_{-\alpha_2}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda - \lambda_2)}{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2} d\lambda_0 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 .$$

Direct findet man den kubischen Inhalt E des Ellipsoides in folgender Weise. Man beschreibe um den Mittelpunkt des Ellipsoides mit der grössten Axe als Radius eine Kugel:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_0 + \lambda_0} = 1.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der ersten Gleichung (7) des Ellipsoides lehrt, dass jede auf der grössten Axe des Ellipsoides senkrecht stehende Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse und die Kugel in einem Kreise schneidet, deren Flächeninhalte sich verhalten wie:

$$\sqrt{(\alpha_1 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_2 + \lambda_0)} : \sqrt{(\alpha_0 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_0 + \lambda_0)}.$$

In demselben Verhältnisse stehen auch die körperlichen Inhalte des Ellipsoides E und der Kugel K. Man hat daher:

$$E = K \cdot \frac{\sqrt{(\alpha_1 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_2 + \lambda_0)}}{\sqrt{(\alpha_0 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_0 + \lambda_0)}}.$$

Setzt man nun für K den bekannten Werth für den Inhalt der Kugel, so hat man:

$$(56) \ldots \; E = \tfrac{4}{3} \cdot \sqrt{(\alpha_0 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_2 + \lambda_0)} \cdot \pi.$$

Man hat daher mit Rücksicht auf (55) die merkwürdige Integral-Formel:

$$(57) \; \tfrac{4}{3} \sqrt{(\alpha_0 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_0)} \sqrt{(\alpha_2 + \lambda_0)} \cdot \pi = \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \int_{-\alpha_1}^{-\alpha_2} \int_{-\alpha_2}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2} d\lambda_0 d\lambda_1 d\lambda_2 .$$

Ein specieller Fall der elliptischen Raumcoordinaten, mit deren Hülfe wir die vorangegangenen Integralformeln fanden, sind die elliptischen Kugelcoordinaten. Man wird auf sie geführt durch die Annahme, dass die Grössen α_0, α_1, α_2 sich sämmtlich der Grenze Null nähern.

Diese Bedingung drücken wir dadurch aus, dass wir setzen:

$$(58) \ldots\ldots \; \alpha_0 = \varepsilon \alpha^0, \quad \alpha_1 = \varepsilon \alpha', \quad \alpha_2 = \varepsilon \alpha''$$

und annehmen, dass der Factor ε sich der Grenze Null nähere, während die Grössen α^0, α', α'' irgend welche gegebene endliche Werthe behalten. Da nun die elliptischen Coordinaten λ_0, λ_1, λ_2 zwischen den in (12) angegebenen Grenzen liegen, so werden wir setzen:

$$(59) \quad \lambda_0 = \lambda^0, \quad \lambda_1 = \varepsilon\lambda', \quad \lambda_2 = \varepsilon\lambda'',$$

um mit endlichen Werthen von λ^0, λ', λ'' zu operiren.

Die Grössen λ^0, λ', λ'' sind nun diejenigen, welche wir elliptische Kugelcoordinaten nennen.

Die Relationen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten und den elliptischen Kugelcoordinaten erhalten wir durch Einsetzen der Werthe (58) und (59) in die drei ersten Gleichungen (7), nämlich:

$$(60) \quad \begin{aligned} \beta_0{}^2 + \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 &= \lambda^0, \\ \frac{\beta_0{}^2}{\alpha^0+\lambda'} + \frac{\beta_1{}^2}{\alpha'+\lambda'} + \frac{\beta_2{}^2}{\alpha''+\lambda'} &= 0, \\ \frac{\beta_0{}^2}{\alpha^0+\lambda''} + \frac{\beta_1{}^2}{\alpha'+\lambda''} + \frac{\beta_2{}^2}{\alpha''+\lambda''} &= 0. \end{aligned}$$

Was die Grenzen der elliptischen Kugelcoordinaten anbetrifft, so entnehmen wir aus (12), dass von diesen Coordinaten liegt:

(61) . . .
die grösste λ^0 zwischen ∞ und 0,
die mittlere λ' zwischen $-\alpha''$ und $-\alpha'$,
die kleinste λ'' zwischen $-\alpha'$ und $-\alpha^0$,
vorausgesetzt, dass: $\alpha^0 > \alpha' > \alpha''$.

Hiernach stellt die erste Gleichung (60) ein System concentrischer Kugeln dar, die zweite und dritte Gleichung ein System confocaler Kegel, deren Spitzen in dem gemeinsamen Mittelpunkte der Kugeln liegen. Im Uebrigen wiederholt sich an diesen drei Arten Oberflächen das, was wir von den drei Arten confocaler Oberflächen ausgesagt haben.

Die Curven, in welchen die genannten Kegel die Kugel, deren Radius $\sqrt{\lambda^0} = 1$ ist, schneiden, nennen wir sphärische Kegelschnitte. Es sind dieses die Schnittcurven von

beliebigen Kegeln zweiter Ordnung mit einer Kugel, deren Radius = 1 und deren Mittelpunkt in der Spitze der Kegel liegt.

Das Bogenelement da_2 des durch $\lambda^0 = 1$ und $\lambda' = C'$ bestimmten sphärischen Kegelschnittes wird demnach, wenn wir, um abzukürzen, setzen:

$$(62)\ldots \quad \begin{aligned} -\Lambda'^2 &= (\alpha^0 + \lambda')(\alpha' + \lambda')(\alpha'' + \lambda'), \\ \Lambda''^2 &= (\alpha^0 + \lambda'')(\alpha' + \lambda'')(\alpha'' + \lambda''), \end{aligned}$$

aus (50) erhalten gleich:

$$(63)\ldots\ldots \quad da_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda' - \lambda'')}}{\Lambda''}\, d\lambda'',$$

woraus man durch Integration und Multiplication mit 4 den ganzen **Umfang** U' der **sphärischen Ellipse** erhält, welche durch die Gleichungen $\lambda^0 = 1$ und $\lambda' = C'$ gegeben ist:

$$(64)\ldots\ldots \quad U' = 2 \cdot \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \frac{\sqrt{(\lambda' - \lambda'')}}{\Lambda''}\, d\lambda''.$$

Diese Gleichung geht, wenn man $\lambda' = -\alpha''$ setzt, über in:

$$(65)\ldots\ldots \quad 2\pi = 2 \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \frac{d\lambda''}{\sqrt{-(\alpha^0 + \lambda'')(\alpha' + \lambda'')}},$$

weil in diesem Falle die sphärische Ellipse ein grösster Kugelkreis wird. Die Richtigkeit dieser Integral-Formel lässt sich leicht direct nachweisen.

Das Flächenelement dF auf der Kugeloberfläche erhält man aus (52) gleich:

$$(66)\ldots\ldots \quad dF = \tfrac{1}{4} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''}\, d\lambda'\, d\lambda'',$$

und daraus den **Flächeninhalt** F' der **sphärischen Ellipse**, welche durch $\lambda^0 = 1$ und $\lambda' = C'$ gegeben ist, durch Integration und Multiplication mit 4, nämlich:

$$(67)\ldots\ldots \quad F' = \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \int_{-\alpha'}^{\lambda'} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''}\, d\lambda'\, d\lambda''.$$

Dieser Flächeninhalt wird gleich der halben Kugeloberfläche, wenn $\lambda' = -\alpha''$. Man hat daher die merkwürdige Integral-Formel:

$$(68) \ldots\ldots \quad 2\pi = \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'}\int_{-\alpha'}^{-\alpha''} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''}\, d\lambda'\, d\lambda''.$$

Das Körperelement dK erhält man aus (54):

$$(69) \ldots\ldots\ldots \; dK = \frac{\sqrt{\lambda^0}\,(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''}\, d\lambda^0\, d\lambda'\, d\lambda''$$

und durch Integration und Multiplication mit 8 den körperlichen Inhalt K der Kugel mit dem Radius $\sqrt{\lambda^0}$:

$$(70) \ldots\ldots \quad K = \tfrac{2}{3}\, \lambda^{0\frac{3}{2}} \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'}\int_{-\alpha'}^{-\alpha''} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''}\, d\lambda'\, d\lambda'',$$

woraus ebenfalls die Integral-Formel (68) hervorgeht, wenn man für den körperlichen Inhalt der Kugel seinen bekannten Werth setzt.

Schliesslich wollen wir noch eines Principes Erwähnung thun, welches dazu dient, gewisse Doppelintegrale auf einfache Integrale zurückzuführen. Dieses Princip leiten wir aus dem bekannten Satze der sphärischen Trigonometrie her, dass jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks, zu der ihm entsprechenden Seite des Polardreiecks addirt, π giebt. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, zu dem Umfange seines Polardreiecks addirt, 2π giebt.

In dieser Fassung lässt sich der angegebene Satz leicht auf sphärische Polygone ausdehnen, so wie auf irgend welche geschlossene Curven auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius $= 1$ ist. Wenn man nämlich unter Polarcurve einer gegebenen Curve auf der Kugeloberfläche diejenige versteht, welche von dem grössten Kreise berührt wird, dessen Pol die gegebene Curve beschreibt, so hat man als Erweiterung des angegebenen Satzes folgenden:

Die Summe des Flächeninhaltes einer sphärischen geschlossenen Curve und des Umfanges ihrer Polarcurve ist gleich 2π.

Da sich nun der Flächeninhalt einer sphärischen Curve als ein Doppelintegral darstellt, der Umfang der Polarcurve aber als ein einfaches Integral, so sieht man, wie, auf diesen Satz gestützt, gewisse Doppelintegrale auf einfache Integrale zurückgeführt werden können.

Als ein einfaches Beispiel solcher Zurückführungen bietet sich die sphärische Ellipse dar, welche von dem Kegel begrenzt wird:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha^0 + \lambda'} + \frac{\beta_1^2}{\alpha' + \lambda'} + \frac{\beta_2^2}{\alpha'' + \lambda'} = 0,$$

deren Polarellipse nach (15) der vierzehnten Vorlesung von dem Kegel:

$$(\alpha^0 + \lambda')\beta_0^2 + (\alpha' + \lambda')\beta_1^2 + (\alpha'' + \lambda')\beta_2^2 = 0$$

begrenzt wird.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Kürzeste Linien auf dem Ellipsoid.

Die Variations-Rechnung lehrt die Differentialgleichungen der kürzesten Linien auf Oberflächen entwickeln und ermittelt aus denselben durch geometrische Interpretation Eigenschaften dieser Linien. Unter diesen findet sich die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linien auf einer Oberfläche, dass die Schmiegungsebene der kürzesten Linie in jedem ihrer Punkte durch die in diesem Punkte errichtete Normale der Oberfläche hindurchgeht. Denn, wenn eine Curve auf der Oberfläche diese Eigenschaft hat, so ist sie eine kürzeste Linie auf derselben. Wir nehmen diese charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie als Definition derselben an, um daraus ihre Differentialgleichung herzuleiten.

Es seien $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes p einer durch ihre Gleichung gegebenen Oberfläche:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u = 0.$$

Es seien ferner $\beta_0 + d\beta_0$, $\beta_1 + d\beta_1$, $\beta_2 + d\beta_2$ die Coordinaten eines beliebigen, aber dem Punkte p unendlich nahen Punktes q der Oberfläche. Da diese Coordinaten auch der Gleichung (1) genügen müssen, so hat man:

$$u + u_0 d\beta_0 + u_1 d\beta_1 + u_2 d\beta_2 + \ldots = 0,$$

wenn man, um abzukürzen, setzt:

$$(2) \ldots \quad \frac{du}{d\beta_0} = u_0, \quad \frac{du}{d\beta_1} = u_1, \quad \frac{du}{d\beta_2} = u_2.$$

Wenn man die Gleichung (1) von der darauf folgenden abzieht und die höheren Potenzen der unendlich kleinen Grössen $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ gegen die niederen vernachlässiget, so erhält man die Gleichung einer durch den Punkt p gehenden Ebene:

$$(3) \ldots\ldots \quad u_0 d\beta_0 + u_1 d\beta_1 + u_2 d\beta_2 = 0,$$

bezogen auf ein, dem zum Grunde gelegten Coordinatensysteme, paralleles, Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in dem Punkte p liegt, indem die unendlich kleinen Grössen $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ die Coordinaten des Punktes q in diesem Sinne vorstellen.

Es beweiset dieses, dass der, dem Punkte p unendlich nahe Punkt q bei seiner Bewegung auf der Oberfläche einen Theil der Ebene (3) beschreibt, der Tangentenebene der Oberfläche in dem Punkte p. Die Normale der Oberfläche, das ist die Normale der Tangentenebene in dem Berührungspunkte, bildet demnach mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie:

$$u_0 : u_1 : u_2.$$

Schmiegungsebene einer Curve im Raume in einem gegebenen Punkte p der Curve wird diejenige Ebene genannt, welche durch den gegebenen Punkt und durch zwei andere Punkte der Curve geht, die dem gegebenen unendlich nahe liegen.

Um die Gleichung der Schmiegungsebene in symmetrischer Form zu erhalten, werden wir annehmen, dass die Coordinaten:

$$\beta_0, \quad \beta_1, \; \beta_2$$

eines beliebigen Punktes p auf der gegebenen Curve als Functionen der einen unabhängigen Variabeln t gegeben seien. Aus denselben erhält man die Coordinaten des, dem Punkte p unendlich nahen, Punktes q der Curve, indem man für t setzt $t + dt$:

$$\beta_0 + \beta_0' dt, \quad \beta_1 + \beta_1' dt, \quad \beta_2 + \beta_2' dt,$$

wo β_0', β_1', β_2' die Differentialquotienten der Coordinaten nach der unabhängigen Variabeln t bedeuten. Setzt man in diesen Ausdrücken für t wieder $t + dt$, so erhält man die Coordinaten eines dritten, unendlich nahen Punktes r der Curve:

$$\beta_0 + 2\beta_0' dt + \beta_0'' dt^2, \quad \beta_1 + 2\beta_1' dt + \beta_1'' dt^2, \quad \beta_2 + 2\beta_2' dt + \beta_2'' dt^2.$$

Diese Coordinaten beziehen sich auf das ursprüngliche Coordinatensystem. Verlegt man jedoch den Anfangspunkt in den Punkt p, so werden die Coordinaten des ersten Punktes sämmtlich 0, und die Coordinaten der beiden anderen Punkte q und r werden:

$$\begin{array}{lll} \beta_0' dt, & \beta_1' dt, & \beta_2' dt, \\ 2\beta_0' dt + \beta_0'' dt^2, & 2\beta_1' dt + \beta_1'' dt^2, & 2\beta_2' dt + \beta_2'' dt^2. \end{array}$$

Sind nun:

$$X, \quad Y, \quad Z$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes s, rücksichtlich des letzteren Coordinatensystemes, so erhält man die Bedingung, dass die vier Punkte p, q, r, s in einer und derselben Ebene liegen, wenn man die aus den angegebenen 9 Coordinaten gebildete Determinante gleich 0 setzt. Es ist dieses die Gleichung der Schmiegungsebene, welcher man nach Satz (29) und (30) der siebenten Vorlesung und mit Weglassung des Factors dt^3 folgende Gestalt geben kann:

$$(4) \; \ldots \ldots \ldots \quad \begin{vmatrix} \beta_0', & \beta_1' & \beta_2' \\ \beta_0'', & \beta_1'' & \beta_2'' \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Nimmt man nun an, dass die Curve auf der Oberfläche (1) $u = 0$ liege, so erhält man aus der letzten Gleichung die Bedingungsgleichung, welche für jeden Punkt p der Curve erfüllt werden muss, wenn die Normale der Oberfläche in der Schmiegungsebene der Curve liegen soll:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \beta_0', & \beta_1', & \beta_2' \\ \beta_0'', & \beta_1'', & \beta_2'' \\ u_0, & u_1, & u_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist dieses die Differentialgleichung der oben definirten kürzesten Linie der Oberfläche, welche in der Zusammenstellung mit der Gleichung $u = 0$ der Oberfläche die kürzeste Linie derselben analytisch ausdrückt. Vollständig entwickelt hat sie die Form:

$$(6) \quad (u_1\beta_2'' - u_2\beta_1'')\beta_0' + (u_2\beta_0'' - u_0\beta_2'')\beta_1' + (u_0\beta_1'' - u_1\beta_0'')\beta_2' = 0.$$

Da die kürzeste Linie ganz auf der Oberfläche $u = 0$ liegt, so muss diese letzte Gleichung, wenn man die Werthe der Coordinaten β_0, β_1, β_2, ausgedrückt als Functionen der unabhängigen Variabeln t, einsetzt, unabhängig von den besonderen Werthen von t, erfüllt werden. Die Gleichung $u = 0$ muss dadurch eine identische Gleichung in t werden. Durch einmalige und zweimalige Differentiation erhält man daher wieder identische Gleichungen:

$$(7) \quad u_0\beta_0' + u_1\beta_1' + u_2\beta_2' = 0,$$

$$(8) \quad u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2' + u_0\beta_0'' + u_1\beta_1'' + u_2\beta_2'' = 0,$$

welche man dazu benutzen kann, die Differentialgleichung (6) der kürzesten Linie der Oberfläche umzuformen und zur Integration geschickt zu machen.

Bestimmen wir zu diesem Zwecke die Verhältnisse von β_0', β_1', β_2' oder vielmehr diese, mit einem unbestimmten Factor μ multiplicirten, Grössen selbst aus den Gleichungen (6) und (7), so erhalten wir für die erste dieser Grössen:

$$\begin{aligned} \mu\beta_0' &= u_2(u_2\beta_0'' - u_0\beta_2'') - u_1(u_0\beta_1'' - u_1\beta_0'') \\ &= \beta_0(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) - u_0(u_0\beta_0'' + u_1\beta_1'' + u_2\beta_2''), \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf (8):

$$\mu\beta_0' = \beta_0''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_0(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2').$$

Wir haben daher:

$$\mu\beta_0' = \beta_0''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_0(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'),$$
$$\mu\beta_1' = \beta_1''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_1(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'),$$
$$\mu\beta_2' = \beta_2''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_2(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2').$$

Der Factor μ in diesen Gleichungen lässt sich auf doppelte Weise symmetrisch ausdrücken. Denn multiplicirt man diese Gleichungen respective mit β_0', β_1', β_2' und addirt, so erhält man den gesuchten Factor in der einen Ausdrucksweise:

$$\mu = \frac{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(\beta_0'\beta_0'' + \beta_1'\beta_1'' + \beta_2'\beta_2'')}{\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2}.$$

Multiplicirt man dagegen dieselben Gleichungen respective mit u_0', u_1', u_2' und addirt, so erhält man:

$$\mu = \frac{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(u_0'\beta_0'' + u_1'\beta_1'' + u_2'\beta_2'')}{u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'} + (u_0u_0' + u_1u_1' + u_2u_2').$$

Zieht man den ersten angegebenen Werth von μ von dem letzten ab und dividirt durch $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2$, so erhält man folgende Form der Differentialgleichung der kürzesten Linie auf der gegebenen Oberfläche $u = 0$:

$$(9)\quad \frac{u_0'\beta_0'' + u_1'\beta_1'' + u_2'\beta_2''}{u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'} + \frac{u_0u_0' + u_1u_1' + u_2u_2'}{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2} - \frac{\beta_0'\beta_0'' + \beta_1'\beta_1'' + \beta_2'\beta_2''}{\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2} = 0.$$

Auf diese Form der Differentialgleichung (5) der kürzesten Linie auf der Oberfläche $u = 0$ kommt man unmittelbar, wenn man jene in Determinanten-Form gegebene Gleichung (5) multiplicirt mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ \beta_0', & \beta_1', & \beta_2' \\ u_0', & u_1', & u_2' \end{vmatrix},$$

welche, gleich 0 gesetzt, [wie wir in einer späteren Vorlesung über die Krümmungscurven der Oberflächen nachweisen werden] die Krümmungscurven der Oberfläche $u = 0$ ausdrückt, und hierauf dividirt durch das Product:

$$(\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)\,(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)\,(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2')$$

Von den drei Brüchen, aus welchen die Gleichung (9) zusammengesetzt ist, sind die beiden letzten die vollständigen Differentialquotienten der Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{2}\log\,(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2),$$
$$\tfrac{1}{2}\log\,(\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2).$$

Aber auch der erste Bruch wird ein vollständiger Differentialquotient des Ausdruckes:

$$\tfrac{1}{2}\log\,(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'),$$

wenn man voraussetzt, dass:

$$(10)\quad u_0'\beta_0'' + u_1'\beta_1'' + u_2'\beta_2'' = u_0''\beta_0' + u_1''\beta_1' + u_2''\beta_2'.$$

Unter dieser Voraussetzung hat man das erste Integral der Differentialgleichung (9) mit der willkürlichen Constante c:

$$(11)\qquad \frac{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)\,(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2')}{\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2} + c = 0.$$

Die unmittelbare Ableitung der Gleichung (9) aus der Gleichung (5) ist einer Mittheilung des Dr. Gehring entnommen. Derselbe suchte den Factor auf, mit dem die Gleichung (5) zu multipliciren sei, um sie auf die Form (9) zurückzuführen. Die angegebene, geometrische Bedeutung des, gleich 0 gesetzten, Factors ergab sich dann von selbst. Man kann demnach kurz sagen:

„Unter der Voraussetzung von Oberflächen zweiter Ordnung ist „die Differentialgleichung der Krümmungscurve der integrirende Factor der kürzesten Linie.

Es ist dieser Gehring'sche Satz nichts anderes, als eine Concentration der algebraischen Operationen, welche wir ausgeführt haben, um die Differentialgleichung (5) in die Form (9) zu bringen und sie dadurch für die, in (11) vollführte, Integration geschickt zu machen.

Man wird kaum Bedenken haben, die Gleichung (11) als ein erstes Integral der Differentialgleichung (5) der kürzesten Linie auf der Oberfläche $u = 0$ der zweiten Ordnung zu erklären. Und doch kann man daran zweifeln.

Da nämlich die Gleichung (9) das Product ist zweier Differentialgleichungen, der Krümmungscurve und der kürzesten Linie, so drückt dieselbe Eigenschaften aus, sowohl der einen, als der anderen Curve. Ihr Integral (11) könnte eben so gut der einen, wie der anderen Curve angehören.

Man überzeugt sich leicht, dass die Bedingungsgleichung (10) erfüllt wird, wenn die gegebene Oberfläche $u = 0$ von der zweiten Ordnung ist. Nehmen wir daher an, die gegebene Oberfläche sei das Ellipsoid:

$$(12) \ldots \quad u = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_0} - 1 = 0,$$

so erhalten wir aus (11) die erste Integralgleichung der kürzesten Linie auf demselben:

$$\left\{\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 + \lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1 + \lambda_0)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2 + \lambda_0)^2}\right\}\left\{\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_0}\right\}$$
$$+ c\left\{d\beta_0^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2\right\} = 0,$$

oder mit Berücksichtigung der ersten Formel (25) der vorhergehenden Vorlesung und nach Multiplication mit B_0^2:

$$(13) \quad \left(\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_0}\right) + cB_0^2(d\beta_0^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2) = 0.$$

Dass dieses Integral (11) der Krümmungscurve nicht angehören kann, möchte man vielleicht daraus schliessen, dass das Integral der Differentialgleichung (11), der Krümmungscurve angehörig, dann zwei willkürliche Constanten enthielte. Aber dieser Schluss scheint unsicher, weil man der wirklichen Integralgleichung der Krümmungscurve mit ihrer willkürlichen Constante immer noch eine zweite willkürliche Constante etwa dadurch beigeben kann, dass man die Gleichung der Oberfläche mit einer willkürlichen Constante multiplicirt und zur Integralgleichung addirt. Wenn man an Stelle der ebengenannten, willkürlichen Constante eine willkürliche Function der Variabeln nehmen wollte, so würde die Zahl der willkürlichen Constanten in der Integralgleichung sogar unbegrenzt sein.

Es schwindet aber jedes Bedenken, wenn man durch Einführung der elliptischen Coordinaten die Differentialgleichung (11) transformirt in (15) und die Differentialgleichung der Krümmungscurve auf Grund von (45) der zweiundzwanzigsten Vorlesung, da λ_0 eine Constante ist, in die Gleichung $d\lambda_1\, d\lambda_2 = 0$ umwandelt, wovon ausführlicher in der späteren Vorlesung über die Krümmungscurven die Rede sein wird.

In dieser Form sieht man es zu deutlich, dass die, in (15) transformirte, Gleichung (11) und die transformirte Gleichung der Krümmungscurven $d\lambda_1\, d\lambda_2 = 0$ sich widersprechen. Es gehört darum das Integral (11) nicht der Krümmungscurve zu, sondern ausschliesslich der kürzesten Linie auf der Oberfläche zweiter Ordnung.

Diese Differentialgleichung muss mit Zuziehung der Gleichung (12) des gegebenen Ellipsoides nochmals integrirt werden, wenn man die Oberfläche erhalten will, welche das gegebene Ellipsoid in der kürzesten Linie auf demselben schneidet. Doch bevor wir diese letzte Integration unternehmen, wollen wir eine geometrische Interpretation der vorliegenden Differentialgleichung (13) vorangehen lassen.

Die Differentialgleichung (13) von der ersten Ordnung, aber vom zweiten Grade, weil in ihr die Differentiale der Variabeln in der zweiten Potenz vorkommen, stellt bei unveränderlichem Werthe der Constante c nicht eine, sondern zwei verschiedene kürzeste Linien dar, welche von dem, durch die Coordinaten β_0, β_1, β_2 bestimmten Punkte p des Ellipsoides (12) ausgehen. Sie stellt, wenn man die Differentiale $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ als variable, rechtwinklige Coordinaten betrachtet, einen Kegel zweiter Ordnung dar mit der Spitze p. Die Schnittlinien der Tangentenebene des Ellipsoides (12) in dem Punkte p und des Kegels sind die Tangenten der beiden von dem Punkte p ausgehenden, kürzesten Linien auf dem Ellipsoid.

Um auf die Natur dieser beiden Tangenten näher einzugehen, transformiren wir die Gleichung des genannten Kegels, welche sich, wenn wir für $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ respective setzen x, y, z, also darstellt:

$$\left(\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{z^2}{\alpha_2+\lambda_0}\right)+cB_0^2(x^2+y^2+z^2)=0,$$

durch die Substitutionen (4) der vorhergehenden Vorlesung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, von welchem zwei Axen in dem Punkte p Tangenten sind der von diesem Punkte ausgehenden Krümmungscurven des Ellipsoides.

Diese Transformation der beiden Theile der Kegelgleichung, aus welchen sie besteht, findet man bereits durchgeführt in (33) und (1) der vorhergehenden Vorlesung. Setzt man in der so transformirten Gleichung des Kegels $X=0$, um die Gleichung der Schnittlinien des Kegels und der Tangentenebene des Ellipsoides in dem Punkte p zu erhalten, so ergiebt sich:

$$-\frac{2}{B_1}\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_0}Y^2-\frac{2}{B_2}\frac{\partial B_2}{\partial\lambda_0}Z^2+cB_0^2(Y^2+Z^2)=0$$

als Gleichung der beiden Tangenten der kürzesten Linien in dem Punkte p auf dem Ellipsoid.

Aus der Form dieser Gleichung, in welcher nur die Quadrate der Variabeln vorkommen, ist ersichtlich, dass die neuen Coordinatenaxen die von den beiden Tangenten gebildeten Winkel halbiren. Deshalb hat man den Satz:

Die in einem gegebenen Punkte des Ellipsoides sich senkrecht schneidenden, beiden Krümmungscurven des Ellipsoides halbiren die Winkel, welche die durch denselben Punkt gehenden, beiden kürzesten Linien bilden, die demselben Werthe der Constante c der ersten Integration entsprechen.

Es bleibt noch übrig, die beiden von dem Punkte p ausgehenden, kürzesten Linien des Ellipsoides geometrisch zu definiren, welche demselben Werthe der Constante c der ersten Integration entsprechen. Zu diesem Zwecke, und um zugleich die letzte Integration der Differentialgleichung (13) der kürzesten Linie vorzubereiten, transformiren wir dieselbe in elliptische Coordinaten durch die Formeln (46) und (47) der vorhergehenden Vorlesung, welche in dem vorliegenden Falle, wo λ_0 eine gegebene Grösse, also $d\lambda_0 = 0$ ist, die einfache Gestalt annehmen:

$$\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} = \frac{1}{4B_1^2} \cdot \frac{d\lambda_1^2}{\lambda_0-\lambda_1} + \frac{1}{4B_2^2} \cdot \frac{d\lambda_2^2}{\lambda_0-\lambda_2},$$

$$d\beta_0^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2 = \frac{1}{4B_1^2}\, d\lambda_1^2 + \frac{1}{4B_2^2}\, d\lambda_2^2,$$

wenn wir berücksichtigen, dass: $\frac{2\partial B_1}{\partial\lambda_0} = \frac{B_1}{\lambda_1-\lambda_0}$ und $\frac{2\partial B_2}{\partial\lambda_0} = \frac{B_2}{\lambda_2-\lambda_0}$.

Durch diese Transformation geht die Differentialgleichung (13), wenn wir ferner berücksichtigen, dass nach (48) und (10) der vorhergehenden Vorlesung ist:

$$A_0^2 = B_0^2(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2),$$
$$A_1^2 = B_1^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_1),$$
$$A_2^2 = B_2^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_2),$$

und der Kürze wegen die neue Constante γ einführen durch die Gleichung:

(14) . . . . $\lambda_0 + cA_0^2 = \gamma,$

über in:

$$(15) \ldots\ldots \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1 - \gamma} \frac{d\lambda_1^2}{\Delta_1^2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_2}{\gamma - \lambda_2} \frac{d\lambda_2^2}{\Delta_2^2} = 0.$$

Zerlegt man diese Differentialgleichung in ihre beiden linearen Factoren, so erhält man die, derselben Constante c (wofür man auch die Constante γ nehmen kann) der ersten Integration entsprechenden Differentialgleichungen der, von demselben Punkte des Ellipsoides ausgehenden, kürzesten Linien auf demselben:

$$(16) \ldots \quad \begin{aligned} &\frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \frac{d\lambda_1}{\Delta_1} - \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0, \\ &\frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda\ )}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \frac{d\lambda_1}{\Delta_1} + \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0. \end{aligned}$$

Da in diesen Gleichungen die Variabeln nur gesondert vorkommen, so kann man die Gleichungen integriren und erhält dadurch die von Jacobi gefundenen Gleichungen der Oberflächen selbst, welche das gegebene Ellipsoid (12) in den besprochenen, kürzesten Linien schneiden:

$$(17) \quad \begin{aligned} &\int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \frac{d\lambda_1}{\Delta_1} - \int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = c_1, \\ &\int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \frac{d\lambda_1}{\Delta_1} + \int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = c_2. \end{aligned}$$

Diese beiden kürzesten Linien auf dem Ellipsoid werden sich nun in einem Punkte p des Ellipsoides schneiden. Der Schnittpunkt p kann auf dem Ellipsoid beliebig gewählt werden, weil jedem Punkte p gewisse Werthe der willkürlichen Constanten c_1 und c_2 entsprechen, wie umgekehrt.

Nehmen wir nun an, dass der willkürlichen Constante γ der ersten Integration ein bestimmter Werth zuertheilt sei, so schneidet jede der beiden angegebenen, kürzesten Linien (17), welche von einem durch die Constanten c_1 und c_2 bestimmten Punkte p des Ellipsoides ausgehen, die durch die Gleichung:

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \lambda_1 = \gamma$$

gegebene Krümmungscurve, und zwar die erste in einem Punkte q_1, die andere in einem Punkte q_2.

Es wird sich sogleich zeigen, dass diese Punkte nicht wirkliche Schnittpunkte, sondern Berührungspunkte der genannten Curven sind.

Die elliptischen Coordinaten des ersten Schnittpunktes q_1 sind λ_0, $\lambda_1 = \gamma$, λ_2, von welchen die letztere Coordinate λ_2 in der ersten Gleichung (17) dadurch bestimmt ist, dass, nach vollführter Integration, λ_1 den Werth γ annimmt. Der dem Punkte q_1 unendlich nahe Punkt der kürzesten Linie hat die Coordinaten λ_0, $\gamma + d\lambda_1$, $\lambda_2 + d\lambda_2$ und zwischen $d\lambda_1$ und $d\lambda_2$ besteht die erste Gleichung (16). Diese Gleichung giebt für $\lambda_1 = \gamma$ den entsprechenden Werth von $d\lambda_1 = 0$ für die kürzeste Linie, und die Gleichung (18) $d\lambda_1 = 0$ für die Krümmungscurve. Deshalb berührt die kürzeste Linie in dem Punkte q_1 die Krümmungscurve (18).

Ebenso berührt die zweite kürzeste Linie (17) dieselbe Krümmungscurve (18) in dem Punkte q_2, in welchem sie die genannte Curve trifft.

Hiernach stellt die Differentialgleichung (13) zwei kürzeste Linien auf dem Ellipsoid dar, welche eine und dieselbe Krümmungscurve des Ellipsoides berühren, und der oben angegebene Satz lässt sich rein geometrisch also wiedergeben:

Die in einem gegebenen Punkte des Ellipsoides sich senkrecht schneidenden Krümmungscurven desselben halbiren in diesem Punkte die, von den beiden durch ihn gehenden, kürzesten Linien, welche irgend eine Krümmungscurve des Ellipsoides berühren, gebildeten Winkel.

Wir thun noch des Falles Erwähnung, wo die ultraelliptischen Differentiale in den Differentialgleichungen (16) der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid auf elliptische Differentiale zurückkommen. Es ist dieses der Fall, wenn die willkürliche Constante c der Integration den Werth 0 und deshalb nach (14) die Constante γ den Werth λ_0 hat. Hierdurch reduciren sich die Differentialgleichungen (16) auf:

$$\frac{d\lambda_1}{\Delta_1} - \sqrt{-1}\,\frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0,$$
$$\frac{d\lambda_1}{\Delta_1} + \sqrt{-1}\,\frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0,$$

und die Differentialgleichung (13) der kürzesten Linie, woraus diese Gleichungen durch Uebertragung in elliptische Coordinaten hervorgegangen sind, auf:

$$\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} = 0.$$

Es ist dieses offenbar die Differentialgleichung einer speciellen Art der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} - 1 = 0.$$

Wir behaupten, dass sie die Differentialgleichung sei der geraden Linien auf dem Ellipsoid. Wir werden diese Behauptung dadurch rechtfertigen, dass wir nachweisen, wie die Gleichung jeder geraden Linie auf dem Ellipsoid der letzten Differentialgleichung genügt.

Zu diesem Zwecke drücken wir die Coordinaten β_0, β_1, β_2 eines beliebigen Punktes auf einer geraden Linie, nach der Vorschrift von (7) der sechsten Vorlesung durch eine unabhängige Variable r aus, wie folgt:

$$\beta_0 = p_0 + q_0 r,$$
$$\beta_1 = p_1 + q_1 r,$$
$$\beta_2 = p_2 + q_2 r.$$

Soll nun diese, durch die 6 Constanten $p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2$ bestimmte, gerade Linie auf dem Ellipsoid liegen, so muss, wenn man die Werthe der Coordinaten von β_0, β_1, β_2 in die Gleichung des Ellipsoides einsetzt, diese Gleichung unabhängig von dem Werthe von r erfüllt werden. Hieraus gehen folgende drei Bedingungen hervor:

$$\frac{p_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{p_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{p_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} - 1 = 0,$$
$$\frac{p_0 q_0}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{p_1 q_1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{p_2 q_2}{\alpha_2+\lambda_0} = 0,$$
$$\frac{q_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{q_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{q_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} = 0.$$

Wenn diese Bedingungsgleichungen erfüllt werden, so liegt die gerade Linie auf dem Ellipsoid. Da dieselben aber nicht alle 6 Constanten bestimmen, so hat man unendlich viele gerade Linien auf dem Ellipsoid. Für jede derselben hat man die Differentiale der Coordinaten:

$$d\beta_0 = q_0 dr, \quad d\beta_1 = q_1 dr, \quad d\beta_2 = q_2 dr,$$

welche auf Grund der zuletzt angegebenen Gleichung, in die Differentialgleichung der kürzesten Linie gesetzt, dieser Gleichung genügen.

Das Ellipsoid enthält nur imaginäre gerade Linien auf seiner Oberfläche, was die dritte der angegebenen Bedingungsgleichungen beweiset. Denn man kann keine reellen Werthe von q_0, q_1, q_2 finden, welche dieser Gleichung genügen. Ebenso kann man keine reellen Werthe von $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ angeben, welche der Differentialgleichung der geraden Linie auf dem Ellipsoid genügen. Offen zu Tage tritt das Imaginäre in den beiden ersten, durch elliptische Differentiale ausgedrückten Gleichungen der geraden Linien auf dem Ellipsoid.

Obgleich diese Gleichungen keine eigentliche, geometrische Interpretation gestatten, so haben wir doch hier auf sie aufmerksam machen wollen, weil die gleiche Untersuchung der kürzesten Linien auf dem Hyperboloid mit einer Mantelfläche auf ähnliche, aber reelle Differentialgleichungen der geraden Linien auf dieser Oberfläche zurückführt.

Um die Länge s der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid auszudrücken, gehen wir zurück auf die Formel (49) der vorhergehenden Vorlesung, welche, wenn man den Werth von P aus (48) einsetzt und bemerkt, dass in dem vorliegenden Falle $d\lambda_0 = 0$ ist, die Gestalt erhält:

$$ds^2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4} \left\{ (\lambda_0 - \lambda_1) \frac{d\lambda_1^2}{\Lambda_1^2} + (\lambda_0 - \lambda_2) \frac{d\lambda_2^2}{\Lambda_2^2} \right\}.$$

Setzt man in dieselbe den Werth von $d\lambda_1$ aus einer der Gleichungen (16) ein, so erhält man durch Ausziehen der Quadratwurzel:

$$\begin{aligned} ds &= (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2} \\ &= (\gamma - \lambda_2) \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2} + (\lambda_1 - \gamma) \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2}. \end{aligned}$$

Benutzt man aber die Gleichungen (16), um die Variabeln zu sondern, so erhält man ds_1 für die eine kürzeste Linie und ds_2 für die andere kürzeste Linie in der von Jacobi angegebenen Form:

$$(19)\quad \begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{(\gamma-\lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2} + \sqrt{(\lambda_1-\gamma)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1}{2\Lambda_1},\\ ds_2 &= \sqrt{(\gamma-\lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2} - \sqrt{(\lambda_1-\gamma)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1}{2\Lambda_1}. \end{aligned}$$

Die Länge s_1 der ersten kürzesten Linie wollen wir rechnen von dem Berührungspunkte derselben mit der Krümmungscurve (18), welcher die elliptischen Coordinaten habe $\lambda_1 = \gamma$ und $\lambda_2 = \lambda_2'$, bis zu dem Schnittpunkte p mit der zweiten kürzesten Linie, welcher die elliptischen Coordinaten habe λ_1 und λ_2. Die Länge s_2 der zweiten kürzesten Linie rechnen wir von dem zuletzt genannten Schnittpunkte p bis zum Berührungspunkte mit der Krümmungscurve (18), welcher die elliptischen Coordinaten $\lambda_1 = \gamma$ und $\lambda_2 = \lambda_2''$ habe. Alsdann erhalten wir durch Integration von (19):

$$(20)\quad \begin{aligned} s_1 &= \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2} \sqrt{(\gamma-\lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2} + \int_{\gamma}^{\lambda_1} \sqrt{(\lambda_1-\gamma)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1}{2\Lambda_1},\\ s_2 &= \int_{\lambda_2}^{\lambda_2''} \sqrt{(\gamma-\lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2} - \int_{\lambda_1}^{\gamma} \sqrt{(\lambda_1-\gamma)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1}{2\Lambda_1} \end{aligned}$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen:

$$(21)\ \ldots\ldots\quad s_1 + s_2 = \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2''} \sqrt{(\gamma-\lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2} + 2\int_{\gamma}^{\lambda_1} \sqrt{(\lambda_1-\gamma)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1}{2\Lambda_1}.$$

Diese Summe wollen wir in Verbindung bringen mit der Länge des von den beiden Tangirungspunkten begrenzten Bogens der Krümmungscurve (18). Das Differentiale dieses Bogens s erhalten wir aus der letzten Gleichung (50) der

vorhergehenden Vorlesung, wenn wir setzen s für a_2 und γ für λ_1, nämlich:

$$ds = \sqrt{(\gamma - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2},$$

woraus durch Integration zwischen den angegebenen Grenzen hervorgeht:

$$(22) \quad \ldots \quad s = \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2''} \sqrt{(\gamma - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\Lambda_2}.$$

Ziehen wir diese Gleichung von (21) ab, so erhalten wir:

$$(23) \ldots \quad s_1 + s_2 - s = 2\int_{\gamma}^{\lambda_1} \sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1}{2\Lambda_1}.$$

Dieser Ausdruck von $s_1 + s_2 - s$ ist unabhängig von der elliptischen Coordinate λ_2 des Punktes p, in welchem sich die betrachteten kürzesten Linien auf dem Ellipsoid schneiden. Er bleibt ungeändert für alle Werthe dieser Coordinate, wenn nur die andere elliptische Coordinate einen bestimmten, unveränderlichen Werth C_1 hat. Es beschreibt daher der Punkt p die Krümmungscurve:

$$\lambda_1 = C_1,$$

wenn der Ausdruck $s_1 + s_2 - s$ ungeändert bleibt.

Dem hierdurch bewiesenen Satze von M. Roberts kann man, wenn man die Eigenschaft der auf Oberflächen gespannten Fäden voraussetzt, dass sie sich in den kürzesten Linien der Oberflächen krümmen, folgenden Ausdruck geben:

Wenn man um eine Krümmungscurve eines gegebenen Ellipsoides einen geschlossenen Faden schlingt und diesen Faden durch einen Stift auf dem Ellipsoide spannt, so beschreibt der Stift bei seiner Bewegung eine zweite Krümmungscurve des Ellipsoides von derselben Art.

Wir wollen noch bemerken, dass, im Falle die Krümmungscurve $\lambda_1 = C_1$, auf welcher der sich bewegende Punkt p

liegt, der Krümmungscurve $\lambda_1 = \gamma$ unendlich nahe ist, das zweite Integral im Ausdrucke (21) wegen des Factors $\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}$ unter dem Integralzeichen gegen das erste unendlich klein wird, und dass im Grenzfalle, wenn beide Krümmungscurven zusammenfallen, die Ausdrücke (21) und (22) einander gleich werden.

Vierundswanzigste Vorlesung.

Focalcurven der Oberflächen zweiter Ordnung.

Wenn die Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte in rechtwinkligen Punktcoordinaten gegeben ist in der Form:

$$(1) \quad \frac{X^2}{\alpha_0} + \frac{Y^2}{\alpha_1} + \frac{Z^2}{\alpha_2} - P^2 = 0,$$

so ist nach der in der zweiundzwanzigsten Vorlesung aufgestellten Definition das System der mit ihr confocalen Oberflächen zweiter Ordnung gegeben:

$$(2) \quad \frac{X^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{Y^2}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{Z^2}{\alpha_2 + \lambda} - P^2 = 0,$$

in welchem die gegebene Oberfläche selbst mit inbegriffen ist.

Durch Uebertragung dieser beiden Gleichungen nach der in der zehnten Vorlesung angegebenen Vorschrift in Ebenencoordinaten, nehmen dieselben die Gestalt an:

$$(3) \quad \alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2 = 0,$$

$$(4) \quad (\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2) + \lambda(U^2 + V^2 + W^2) = 0.$$

Unter den, durch die letzte Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ dargestellten, confocalen Oberflächen giebt es auch Grenzflächen, für welche der Factor λ und die Coordinaten U, V, W, R der Ebenen, in welchen sie liegen, nach

den Auseinandersetzungen der fünfzehnten Vorlesung durch folgende Gleichungen zu bestimmen sind:

$$(\alpha_0 + \lambda)\ U = 0, \quad (\alpha_2 + \lambda)\ W = 0,$$
$$(\alpha_1 + \lambda)\ V = 0, \qquad R = 0.$$

Diesen 4 Gleichungen kann durch folgende 4 Werthe von λ genügt werden:

$$\lambda = \infty, \quad \lambda = -\alpha_0, \quad \lambda = -\alpha_1, \quad \lambda = -\alpha_2$$

und dem entsprechen folgende 4 Grenzflächen:

$$(5) \ldots \begin{aligned} & U^2 + V^2 + W^2 = 0 \\ & (\alpha_1 - \alpha_0)\ V^2 + (\alpha_2 - \alpha_0)\ W^2 - R^2 = 0, \\ & (\alpha_0 - \alpha_1)\ U^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\ W^2 - R^2 = 0, \\ & (\alpha_0 - \alpha_2)\ U^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\ V^2 - R^2 = 0. \end{aligned}$$

Die erste derselben liegt in der Ebene, welche in das Unendliche fällt und entgeht daher der geometrischen Anschauung.

Die drei anderen Grenzflächen werden begrenzt durch die in Punktcoordinaten ausgedrückten Kegelschnitte:

$$(6) \ldots\ldots \begin{aligned} & \frac{Y^2}{\alpha_1 - \alpha_0} + \frac{Z^2}{\alpha_2 - \alpha_0} - P^2 = 0, \\ & \frac{X^2}{\alpha_0 - \alpha_1} + \frac{Z^2}{\alpha_2 - \alpha_1} - P^2 = 0, \\ & \frac{X^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{Y^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - P^2 = 0, \end{aligned}$$

von welchen jeder in einer der drei, die Hauptaxen der confocalen Oberflächen verbindenden, Ebenen liegt.

Denn betrachtet man zum Beispiel die in λ veränderliche Oberfläche (2) in dem Zustande, in welchem sie sich der vierten Grenzfläche nähert, indem man setzt $\lambda = -\alpha_2 + \varepsilon$, und versteht unter ε eine verschwindend kleine Grösse, so hat man die Gleichung der Oberfläche in Punktcoordinaten:

$$\frac{X^2}{\alpha_0 - \alpha_2 + \varepsilon} + \frac{Y^2}{\alpha_1 - \alpha_2 + \varepsilon} + \frac{Z^2}{\varepsilon} - P^2 = 0.$$

Aus welcher Gleichung zu ersehen ist, dass nur verschwindend kleine Werthe von Z derselben genügen können, und

dass im Grenzfalle die dritte Gleichung (6) den in der XY-Ebene gelegenen Kegelschnitt ausdrückt, welcher die Grenzfläche begrenzt.

Schliesst man die im Unendlichen gelegene Grenzfläche aus, so bleiben noch drei endliche Grenzflächen übrig, welche von den drei Kegelschnitten (6) begrenzt werden.

Wenn man annimmt, dass:

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2,$$

so wird der erste Kegelschnitt imaginär, der zweite eine Hyperbel, der letzte eine Ellipse.

Man nennt diese drei, die Grenzflächen der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung begrenzenden, Kegelschnitte die Focalcurven der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung. Die Focalellipse liegt in der Ebene der grössten und mittleren Axe der confocalen Ellipsoide, die Focalhyperbel liegt in der Ebene der grössten und kleinsten Axe, die imaginäre Focalellipse liegt in der Ebene der beiden kleinsten Axen der confocalen Ellipsoide.

Die Ebenen, in welchen die reellen Focalcurven liegen, stehen auf einander senkrecht, und die eine Focalcurve geht immer durch die Brennpunkte der anderen. Wir drücken die letztere Bemerkung so aus: „die beiden Punkte auf der einen reellen Focalcurve, welche in der Ebene der anderen liegen, sind die Brennpunkte der letzteren,“ um sie als einen speciellen Fall des allgemeinen Satzes aufzufassen:

Irgend zwei Punkte der einen reellen Focalcurve haben die Eigenschaft der Brennpunkte in Rücksicht auf die andere reelle Focalcurve, dass die Summe oder die Differenz der von ihnen nach einem veränderlichen Punkte der anderen reellen Focalcurve geführten Strahlen eine constante Grösse ist.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren, wie folgt:

Wenn zwei Punkte im Raume die genannte Eigenschaft der Brennpunkte haben in Rücksicht auf

einen beliebig gegebenen Kegelschnitt, so liegen diese beiden Punkte auf der dem Kegelschnitte entsprechenden zweiten Focalcurve.

Von der weiteren Begründung dieser beiden merkwürdigen Sätze können wir hier absehen, da wir von ihnen in dem Folgenden keinen Gebrauch machen werden.

Der Begriff der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung, der bisher nur Oberflächen mit einem Mittelpunkte umfasste, lässt sich so erweitern, dass auch die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt hineingezogen werden. Diese Erweiterung des Begriffes der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung werden wir ableiten von der in Ebenencoordinaten gegebenen Gleichung (4) der confocalen Oberflächen, in welcher wir für λ setzen $\frac{\lambda}{\mu}$ und mit μ multipliciren, wodurch wir erhalten:

$$(8)\quad \mu(\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2) + \lambda(U^2 + V^2 + W^2) = 0.$$

Der erste Theil dieser Gleichung mit den 4 willkürlichen Constanten μ, α_0, α_1, α_2:

$$\mu(\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2)$$

gleich 0 gesetzt, stellt irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte dar. Derselbe gehe durch die Substitutionen (23) der achtzehnten Vorlesung, durch welche allein die Richtungen der rechtwinkligen Coordinatenaxen beliebig geändert werden, über in die Function der zweiten Ordnung:

$$\mathfrak{L}(u, v, w, R)$$

mit den drei neu hinzukommenden, willkürlichen Constanten, welche in jenen Substitutionen die Richtungen der neuen, rechtwinkligen Coordinatenaxen bestimmen. Durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in einen Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten rücksichtlich des letzteren Coordinatensystemes die willkürlichen Constanten $-a$, $-b$, $-c$ seien, geht auf Grund von (8) der dreizehnten Vorlesung die genannte Function über in die Function:

$$\mathfrak{L}(u, v, w, r + au + bv + cw),$$

welche wir mit ihren 10 willkürlichen Constanten der Kürze wegen bezeichnen wollen mit:

$$F(u, v, w, r),$$

so dass man auf Grund der doppelten Transformation hat:

$$(9) \quad \mu(\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2) = F(u, v, w, r).$$

Was den zweiten Theil der Gleichung (8) anbetrifft, so weiss man, dass derselbe durch die doppelte Transformation übergeht in:

$$(10) \ldots \quad \lambda(U^2 + V^2 + W^2) = \lambda(u^2 + v^2 + w^2).$$

Es nimmt daher die Gleichung (8) der confocalen Oberflächen, auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, die Gestalt an:

$$(11) \ldots \quad F(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

indem die Gleichung $F(u, v, w, r) = 0$ irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte ausdrückt.

Wir erweitern nun den Begriff der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung, wenn wir die Beschränkung, dass die Oberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ einen Mittelpunkt habe, aufheben, und als erweiterte Definition der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung folgenden Satz aufstellen:

Wenn $F(u, v, w, r) = 0$ der analytische Ausdruck irgend einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist, so drückt die Gleichung:

$$F(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

alle mit der gegebenen Oberfläche confocalen Oberflächen zweiter Ordnung aus.

Von dieser Regel machen die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt keine Ausnahme. Vielmehr sieht man, wenn die zum Grunde gelegte Oberfläche zweiter Ordnung $F(u, v, w, r) = 0$ keinen Mittelpunkt hat, das ist nach (15) der dreizehnten Vorlesung, wenn das mit r^2 multiplicirte Glied in

der Gleichung derselben fehlt, dass auch die mit ihr confocalen Oberflächen zweiter Ordnung keinen Mittelpunkt haben.

Der angegebene Satz bietet zugleich ein Mittel, das Problem der Hauptaxen einer in Ebenencoordinaten gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung $F(u, v, w, r) = 0$ aus einem ganz neuen Gesichtspunkte zu behandeln. Denn bestimmt man den Werth von λ in der Gleichung (11) so, dass die durch jene Gleichung dargestellte Oberfläche eine Grenzfläche wird, so weiss man, dass die Ebene dieser Grenzfläche durch zwei Hauptaxen der Oberfläche geht. Da man nun drei endliche Werthe von λ bestimmen kann, welche die Oberfläche (11) zu einer Grenzfläche machen, so hat man auch die drei Ebenen dieser Grenzflächen, welche sich paarweise in den Hauptaxen der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung schneiden, und dadurch die Richtungen der Hauptaxen der gegebenen Oberfläche selbst.

Um mit wenig Worten die Durchführung dieser Idee anzudeuten, wollen wir annehmen, dass:

$$(12) \ldots \quad F(u, v, w, r) = e_{00}u^2 + 2e_{01}uv + e_{11}v^2 + \ldots$$

Alsdann wird nach (3) der fünfzehnten Vorlesung die Oberfläche (11) jedesmal eine Grenzfläche, wenn man die Werthe von u, v, w, λ bestimmt, welche folgenden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen:

$$(13) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}F'(u) + \lambda u &= 0, \\ \tfrac{1}{2}F'(v) + \lambda v &= 0, \\ \tfrac{1}{2}F'(w) + \lambda w &= 0, \\ \tfrac{1}{2}F'(r) \qquad &= 0, \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination der Ebenencoordinaten die in λ kubische Gleichung erhält:

$$(14) \ldots \quad \begin{vmatrix} e_{00}+\lambda, & e_{01}, & e_{02}, & e_{03} \\ e_{10}, & e_{11}+\lambda, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}+\lambda, & e_{23} \\ e_{30}, & e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzeln eben jene Werthe von λ sind, welche die Oberfläche (11) zu einer Grenzfläche machen. Sind diese bekannt,

so ergeben sich die Verhältnisse der Coordinaten der Ebenen, in welchen die drei Grenzflächen liegen, durch die Auflösung der, in Rücksicht auf sie, linearen Gleichungen (13).

Ist die gegebene Oberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ selbst eine Grenzfläche, also irgend ein Kegelschnitt, so führt die kubische Gleichung (14), weil ein Werth $\lambda = 0$ der Gleichung genügt, auf eine quadratische Gleichung zurück, und die, den beiden Wurzeln λ der quadratischen Gleichung entsprechenden, Ebenen schneiden die Ebene des Kegelschnittes in den Hauptaxen.

Die zum Grunde gelegte Oberfläche zweiter Ordnung (3) ist eine Rotationsoberfläche, wenn zwei von den drei Grössen α_0, α_1, α_2 einander gleich sind, und die, der dritten von diesen Grössen entsprechende, Hauptaxe ist die Rotationsaxe der Oberfläche. Die mit der gegebenen Rotationsoberfläche confocalen Oberflächen (4) sind wieder Rotationsoberflächen mit derselben Rotationsaxe.

Was die Focalcurven der Rotationsoberfläche anbetrifft, so ersieht man aus (6), dass eine derselben immer ein reeller oder imaginärer Kreis ist, und dass die beiden anderen gerade Linien werden, die in die Rotationsaxe fallen. Die eine von diesen geraden Linien wird begrenzt von den Brennpunkten des Kegelschnittes, durch dessen Rotation die Oberfläche entstanden ist, die andere erstreckt sich von den Brennpunkten auf beiden Seiten der Rotationsaxe bis in das Unendliche.

Um einen ganz bestimmten Fall der Rotationsoberfläche (3) zur Discussion vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass $\alpha_1 = \alpha_2$ sei. In dieser Voraussetzung wird die Gleichung (9):

$$(15) \quad \mu\alpha_1[U^2+V^2+W^2]-\mu[R^2-(\alpha_0-\alpha_1)U^2]=F(u, v, w, r).$$

Der Factor $R^2 - (\alpha_0 - \alpha_1) U^2$ des zweiten Gliedes in dieser Gleichung ist das Product zweier linearen Factoren A und A_1. Setzt man ferner $\mu\alpha_1 = \nu$, so hat man für die Rotationsoberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ die Form der Function $F(u, v, w, r)$:

$$(16) \ldots \quad \nu(U^2 + V^2 + W^2) - \mu A A_1 = F(u, v, w, r),$$

in welcher $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen der Brenn-

punkte bedeuten des Kegelschnittes, durch dessen Rotation um die, die Brennpunkte verbindende, Gerade die Rotationsoberfläche erzeugt ist.

Der linke Theil dieser Gleichung geht über in seinen rechten Theil durch die doppelten, oben angegebenen Substitutionen, durch welche man die identische Gleichung erhält:

$$(17) \ldots \quad \nu(u^2 + v^2 + w^2) - \mu A A_1 = F(u, v, w, r),$$

indem A und A_1 lineare Ausdrücke bedeuten, von der Form:

$$(18) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A &= \alpha u + \beta v + \gamma w + r, \\ A_1 &= \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + r, \end{aligned}$$

welche, gleich 0 gesetzt, die Brennpunkte der Rotationsoberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ darstellen.

Wenn daher eine durch ihre Gleichung $F(u, v, w, r) = 0$ in Ebenencoordinaten gegebene Oberfläche zweiter Ordnung eine Rotationsoberfläche sein soll, so muss die Function $F(u, v, w, r)$ sich auf die in (17) angegebene Form zurückführen lassen.

Die Bedingungen für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung $F(u, v, w, r) = 0$ erhält man demnach, wenn man die Coefficienten der Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung (17) einander gleich setzt, woraus 10 Gleichungen entstehen zwischen den 8 Unbekannten $\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, und aus diesen 10 Gleichungen die 8 Unbekannten eliminirt. Als Resultat der Elimination erhält man dann zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der gegebenen Gleichung der Oberfläche. Es stimmt dieses überein mit den, am Ende der neunzehnten Vorlesung über Rotationsoberflächen zweiter Ordnung gemachten Bemerkungen, auf Grund welcher sich auch zwei Bedingungsgleichungen (39) für die Rotationsoberfläche ergaben.

Es bedarf nicht der Aufstellung dieser beiden Bedingungsgleichungen; die angegebene Form:

$$(19) \ldots\ldots \quad \nu(u^2 + v^2 + w^2) - \mu A A_1 = 0$$

der Gleichungen der Rotationsoberfläche zweiter Ordnung reicht schon hin, Eigenschaften dieser Art Oberflächen zu entdecken.

Denn stellt man die Gleichung (19), in welcher $r = 1$ gesetzt werde, also dar:

$$(20) \ldots \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{A}{\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}},$$

so sieht man, dass jeder der beiden Factoren des rechten Theiles der Gleichung, nach (8) der fünften Vorlesung, seine geometrische Bedeutung hat. Dieselben drücken nämlich die Längen der Lothe aus, welche von den Brennpunkten $A = 0$ und $A_1 = 0$ auf eine Tangentenebene der Rotationsoberfläche gefällt sind. Da nun der linke Theil $\frac{\nu}{\mu}$ in der Gleichung eine constante Grösse ist, so hat man den Satz:

Das Product der, von den beiden, in der Rotationsaxe liegenden, Brennpunkten einer Rotationsoberfläche zweiter Ordnung auf die Tangentenebene der Oberfläche gefällten Lothe ist eine constante Grösse.

Bei der Zurückführung der Gleichung der Rotationsoberfläche zweiter Ordnung auf die Form (19) kann es sich ereignen, dass beide lineare Factoren A und A_1 imaginär werden. In diesem Falle ist die Oberfläche erzeugt durch Umdrehung des Kegelschnittes um die Axe, in welcher die imaginären Brennpunkte liegen. Ferner kann in einem der Factoren A oder A_1 dasjenige Glied fehlen, welches den Factor r hat. In diesem Falle fehlt auch in der Entwickelung der Gleichung (19) das mit r^2 multiplicirte Glied, und die Rotationsoberfläche ist dann, nach (15) der dreizehnten Vorlesung, eine Oberfläche ohne Mittelpunkt.

Schliessen wir nun die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit imaginären Brennpunkten aus, und verlegen den, durch die Gleichung $A_1 = 0$ gegebenen Brennpunkt der Oberfläche in den Coordinatenanfangspunkt, so haben wir $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$; wodurch die Gleichung (19) der Rotationsoberfläche die Gestalt erhält:

$$(21) \ldots \quad u^2 + v^2 + w^2 - \frac{\mu}{\nu}(au + bv + cw + 1) = 0.$$

Die Gleichung kann man ohne Schwierigkeit auf die Form bringen:

$$(22) \ldots (u - A)^2 + (v - B)^2 + (w - C)^2 - R^2 = 0.$$

In dieser Form unterscheidet sich dieselbe von der Gleichung der Kugel mit dem Radius R und den Coordinaten A, B, C des Mittelpunktes:

$$(23) \ldots (x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 - R^2 = 0$$

nur dadurch, dass die variabeln Ebenencoordinaten mit den variabeln Punktcoordinaten vertauscht sind.

Dieser Umstand kann dazu benutzt werden, um geometrische Sätze über Kugeln auf Rotationsoberflächen zu übertragen, welche einen Brennpunkt gemein haben, und umgekehrt aus Sätzen über Rotationsoberflächen, welche einen Brennpunkt gemein haben, entsprechende Sätze über Kugeln herzuleiten. Einfache Beispiele sollen dieses Uebertragungsprincip erläutern.

Wir bezeichnen zu diesem Zwecke mit K_μ und K_ν die Ausdrücke:

$$K_\mu = (x - A_\mu)^2 + (y - B_\mu)^2 + (z - C_\mu)^2 - R_\mu^2,$$
$$K_\nu = (x - A_\nu)^2 + (y - B_\nu)^2 + (z - C_\nu)^2 - R_\nu^2.$$

Der aus diesen Ausdrücken zusammengesetzte Ausdruck: $\frac{K_\mu - \lambda K_\nu}{1 - \lambda}$ kann auf eine gleiche Form K_ϱ gebracht werden, so dass man identisch hat:

$$K_\mu - \lambda K_\nu = (1 - \lambda) K_\varrho.$$

Da nun die Gleichungen $K_\mu = 0$, $K_\nu = 0$, $K_\varrho = 0$ Kugeln vorstellen, so beweiset die angegebene, identische Gleichung den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurven zweier Kugeln gehen, sind wieder Kugeln.

Betrachtet man dagegen die Punktcoordinaten als Ebenencoordinaten, so stellen die Gleichungen $K_\mu = 0$, $K_\nu = 0$, $K_\varrho = 0$ Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben

Brennpunkte dar, und man erkennt in der angegebenen identischen Gleichung den Beweis des Satzes:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche von den, zweien Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte gemeinschaftlichen, Tangentenebenen berührt werden, sind wieder Rotationsoberflächen mit demselben Brennpunkte.

Hat man ferner die Gleichungen von 4 Kugeln in Punktcoordinaten:

$$K_0 = 0, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0,$$

so stellen folgende sechs Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} K_0 - K_1 = 0, & K_1 - K_2 = 0, & K_2 - K_3 = 0, \\ K_0 - K_2 = 0, & K_1 - K_3 = 0, & \\ K_0 - K_3 = 0, & & \end{array}$$

als lineare Gleichungen die Ebenen dar, in welchen sich je zwei Kugeln schneiden. Da aber aus den drei, in der ersten Horizontalreihe aufgeführten Gleichungen die drei übrigen folgen, so hat man nach (14) der zweiten Vorlesung den Satz:

Die sechs Ebenen, in welchen sich vier Kugeln paarweise schneiden, gehen durch einen und denselben Punkt.

Betrachtet man dagegen in den zehn aufgestellten Gleichungen die Punktcoordinaten als Ebenencoordinaten, so stellen die vier ersten Gleichungen vier Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit einem und demselben Brennpunkte dar. Jede der sechs darauf folgenden Gleichungen liefert den Beweis, dass zwei Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte von einem und demselben Kegel zweiter Ordnung ringsum berührt werden, dessen Spitze nicht in dem Brennpunkte liegt. Denn der gemeinsame Brennpunkt ist immer die Spitze eines, beiden Rotationsoberflächen gemeinsamen, imaginären Tangentenkegels. Jene sechs Gleichungen sind die analytischen Ausdrücke für die Spitzen der sechs Kegel zweiter Ordnung, von welchen

jeder zwei der genannten Rotationsoberflächen ringsum berührt. Da nun aus drei von diesen sechs Gleichungen die drei anderen folgen, so hat man nach (14) der fünften Vorlesung, mit Ausschluss des Brennpunktes als gemeinsamer Spitze imaginärer Tangentenkegel, den Satz:

Die Spitzen der sechs Kegel zweiter Ordnung, welche je zwei von vier Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte ringsum berühren, liegen auf einer und derselben Ebene.

Wenn die Brennpunkte $A = 0$ und $A_1 = 0$ der Rotationsoberfläche (19) zusammenfallen, wenn also $A = A_1$, so wird die Rotationsoberfläche eine Kugel:

$$u^2 + v^2 + w^2 - \frac{\mu}{\nu} A^2 = 0,$$

indem $A = 0$ die Gleichung des Mittelpunktes und $\frac{\nu}{\mu}$ nach der geometrischen Interpretation der Gleichung (20) das Quadrat des Radius ϱ derselben ausdrückt. Es stellt sich demnach die Gleichung irgend einer Kugel in Ebenencoordinaten also dar:

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{\varrho^2} A^2 = 0,$$

wenn ϱ der Radius der Kugel und $A = 0$ die Gleichung des Mittelpunktes derselben in der Normalform ist.

Zu derselben Kugelgleichung in Ebenencoordinaten gelangt man auch auf folgendem directen Wege. Man weiss, dass die Gleichung der Kugel in Ebenencoordinaten, wenn ϱ der Radius derselben und der Mittelpunkt in dem Coordinatenanfangspunkte liegt, ist:

$$U^2 + V^2 + W^2 - \frac{1}{\varrho^2} R^2 = 0,$$

in welcher Gleichung $R = 0$ den Mittelpunkt der Kugel ausdrückt. Durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes, vermittelst der Formeln (8) der dreizehnten Vorlesung, geht diese Kugelgleichung über in die Form (24), in welcher $R = A = 0$ die Gleichung des Mittelpunktes der Kugel ist.

Die angegebene Form der Kugelgleichung (24) werden wir benutzen zur Erörterung der Frage, ob unter den Tangentenkegeln einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung auch Rotationskegel gefunden werden.

Es sei: $F = 0$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten und $\Phi = 0$ die Gleichung einer noch unbestimmten Kugel, indem wir der Function Φ die Bedeutung unterlegen:

$$(24)^* \quad \Phi = u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{\varrho^2} A^2.$$

Wenn nun die gegebene Oberfläche einen Tangentenkegel hat, der zugleich Rotationskegel ist, so kann man eine Kugel $\Phi = 0$ in den Rotationskegel hineinlegen, die von dem Kegel ringsum berührt wird; und umgekehrt, wenn man eine Kugel $\Phi = 0$ bestimmen kann, welche von einem Tangentenkegel der gegebenen Oberfläche ringsum berührt wird, so muss der Tangentenkegel ein Rotationskegel sein. Die Bedingung, dass Letzteres zutreffe, drückt nach der elften Vorlesung die identische Gleichung aus:

$$(25) \quad F - \mu\Phi = \lambda BC,$$

in welcher B und C lineare Ausdrücke der Ebenencoordinaten bedeuten.

Diese identische Gleichung zerfällt in zehn Bedingungsgleichungen. Eliminirt man aus letzteren die 7 in λBC steckenden Constanten und den Factor μ, so erhält man zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten α, β, γ des durch die Gleichung $A = 0$ ausgedrückten Mittelpunktes der Kugel und dem Radius ϱ derselben; und daraus die Gleichungen der Curve selbst, in welcher die Spitzen der Rotationskegel liegen, wenn man $\varrho = 0$ setzt. Denn je kleiner ϱ wird, um so mehr nähert sich die Kugel der Kegelspitze, mit welcher sie im Grenzfalle zusammenfällt. Eliminirt man aber aus den beiden zuletzt genannten Gleichungen ϱ, so erhält man die Gleichung der Oberfläche, in welcher die Rotationsaxen der Tangentenkegel liegen.

Die Durchführung dieser Elimination ist nicht ohne Schwierigkeit, wenn die Function F in der allgemeinen Form gegeben

ist. Wir wollen daher annehmen, dass die gegebene Oberfläche auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptaxen bezogen sei, indem wir setzen:

$$(26) \ldots\ldots \quad F = \alpha_0 u^2 + \alpha_1 v^2 + \alpha_2 w^2 - r^2.$$

In dieser Voraussetzung wird die identische Gleichung (25):

$$(27) \ [\alpha_0 u^2 + \alpha_1 v^2 + \alpha_2 w^2 - r^2] - \mu\left[u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{\varrho^2}(\alpha u + \beta v + \gamma w + r)^2\right] = \lambda BC.$$

Man erkennt in dieser Form der Gleichung leicht die drei Bedingungen zwischen den fünf Grössen α, β, γ, μ, ϱ, welche zu erfüllen sind, wenn der linke Theil der Gleichung sich in lineare Factoren zerlegen lassen soll.

Macht man nämlich die Variable w verschwinden, indem man setzt:

$$(28) \ldots\ldots\ldots \quad \gamma = 0, \quad \alpha_2 - \mu = 0,$$

so lässt sich der übrig bleibende, linke Theil der Gleichung in lineare Factoren zerlegen, wenn die Bedingungsgleichung erfüllt wird:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 - \mu + \frac{\mu\alpha^2}{\varrho^2}, & \frac{\mu\alpha\beta}{\varrho^2}, & \frac{\mu\alpha}{\varrho^2} \\ \frac{\mu\alpha\beta}{\varrho^2}, & \alpha_1 - \mu + \frac{\mu\beta^2}{\varrho^2}, & \frac{\mu\beta}{\varrho^2} \\ \frac{\mu\alpha}{\varrho^2}, & \frac{\mu\beta}{\varrho^2}, & \frac{\mu}{\varrho^2} - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

deren linker Theil die Determinante ist, gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten des übrig bleibenden, linken Theiles der Gleichung (27).

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$\varrho^2 + \mu\left\{\frac{\alpha^2}{\alpha_0 - \mu} + \frac{\beta^2}{\alpha_1 - \mu} - 1\right\} = 0,$$

und wenn man darin für μ den Werth aus (28) setzt:

$$(29) \ldots \quad \varrho^2 + \alpha_2\left\{\frac{\alpha^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{\beta^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - 1\right\} = 0.$$

Hiernach ist $\gamma = 0$ die Gleichung der Oberfläche, in welcher die Rotationsaxen der Kegel, also auch ihre Spitzen

liegen, das ist die xy-Ebene des Coordinatensystemes. Setzen wir, um die zweite Oberfläche zu erhalten, in welcher die Kegelspitzen liegen, in (29) $\varrho = 0$, so erhalten wir:

$$(30) \ldots\ldots \quad \frac{\alpha^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{\beta^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - 1 = 0.$$

Beide Oberflächen schneiden sich in der dritten Focalcurve (6) der gegebenen Oberfläche, welche demnach der geometrische Ort ist für die Spitzen der, an die gegebene Oberfläche gelegten Tangentenkegel, welche zugleich Rotationskegel sind.

Aber man kann auch, um den linken Theil der Gleichung (27) in lineare Factoren zerfällbar zu machen, statt w entweder v oder u verschwinden lassen, indem man setzt $\beta = 0$ und $\alpha_1 - \mu = 0$, oder $\alpha = 0$ und $\alpha_0 - \mu = 0$, wodurch man schliesslich die beiden anderen Focalcurven der gegebenen Oberfläche als den geometrischen Ort der Spitzen der Tangentenkegel erhalten würde, die zugleich Rotationskegel sind. Man hat daher den Satz:

Die Focalcurven einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sind der geometrische Ort der Spitzen der Tangentenkegel für die gegebene Oberfläche, welche zugleich Rotationskegel sind.

Da sich jeder Kegelschnitt als Grenzfläche zweiter Ordnung betrachten lässt, so folgt aus dem angegebenen Satze unmittelbar:

Die, einem gegebenen Kegelschnitt zugehörigen Focalcurven sind der geometrische Ort der Spitzen der Rotationskegel, welche durch den gegebenen Kegelschnitt gelegt werden können.

Was die Kugel anbetrifft, die wir uns in den Rotationskegel hineingelegt dachten, welcher zugleich Tangentenkegel der gegebenen Oberfläche ist, so haben wir zwischen den Coordinaten des Mittelpunktes α, β, γ und dem Radius ϱ derselben die Relationen (28) und (29), welche beweisen, dass man den Mittelpunkt O in der xy-Ebene beliebig wählen kann, dass aber der Radius ϱ dann durch (29) bestimmt ist. Um

diese Kugel und die gegebene Oberfläche lassen sich aber zwei Rotationskegel legen, deren Spitzen auf Grund der identischen Gleichung (27) durch folgende, lineare Gleichungen ausgedrückt werden: $B = 0$, $C = 0$.

Diese Kegelspitzen $B = 0$, $C = 0$ sind Punkte der Focalcurve (30) und die geraden Linien OB und OC die Rotationsaxen der beiden Kegel. Um die Lage dieser Rotationsaxen zu erforschen, stellen wir die Gleichung $\lambda BC = 0$ der beiden Punkte auf, indem wir den, durch die Gleichungen (28) reducirten, linken Theil der identischen Gleichung (27) gleich 0 setzen:

$$[(\alpha_0 - \alpha_2)u^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)v^2 - r^2] + \frac{\alpha_2}{\varrho^2}[\alpha u + \beta v + r]^2 = 0.$$

Der erste Theil in dieser Gleichung gleich 0 gesetzt:

$$(\alpha_0 - \alpha_2)u^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)v^2 - r^2 = 0$$

stellt die Focalcurve (30) in Ebenencoordinaten dar, der zweite Theil ebenfalls gleich 0 gesetzt:

$$[\alpha u + \beta v + r]^2 = 0$$

stellt ein Punktepaar dar, welches zusammenfällt mit dem Punkte O. Deshalb drückt die, aus den zuletzt genannten beiden Gleichungen zusammengesetzte, erste Gleichung einen Kegelschnitt aus, welcher die beiden, von dem Punkte O an die Focalcurve gezogenen Tangenten berührt. Da aber dieser Kegelschnitt in das Punktepaar $B = 0$, $C = 0$ übergeht, welches in der Focalcurve liegt, so können die beiden Punkte nur die Berührungspunkte sein der, von dem Punkte O an die Focalcurve gezogenen Tangenten. Es sind also die geraden Linien OB und OC Tangenten der Focalcurve. Man hat daher den Satz:

Der geometrische Ort der Rotationsaxen der Tangentenkegel einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung, welche zugleich Rotationskegel sind, sind die Ebenen, in welchen die Focalcurven der gegebenen Oberfläche liegen. Jede Rotationsaxe berührt die Focalcurve, in deren Ebene sie liegt, in der Spitze des Rotationskegels.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Die Axen des Körpers.

Es liege ein unveränderlicher Körper vor von irgend welcher Masse und bezogen auf ein beliebig angenommenes, rechtwinkliges Coordinatensystem. In diesem Coordinatensysteme seien x, y, z die Coordinaten des Elementes dm der Masse des Körpers und daher $dm = \varrho\, dx\, dy\, dz$, wenn ϱ die Dichtigkeit des Elementes ausdrückt. Alsdann sind es folgende zehn Integrale, welche die analytische Mechanik bei der Bewegung des Körpers in Rechnung bringen muss:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \int x^2\, dm, & \int y^2\, dm, & \int z^2\, dm, & \\ \int yz\, dm, & \int zx\, dm, & \int xy\, dm, & \\ \int x\, dm, & \int y\, dm, & \int z\, dm, & \int dm. \end{array}$$

Wir werden diese, auf den ganzen Körper sich erstreckenden, Integrale kürzer bezeichnen mit:

$$(1^*) \quad \begin{array}{llll} a_{00}, & a_{11}, & a_{22}, & \\ a_{12}, & a_{20}, & a_{01}, & \\ a_{03}, & a_{13}, & a_{23}, & a_{33}. \end{array}$$

Für ein beliebiges andere, rechtwinklige Coordinatensystem, für welches die Transformationsformeln gelten sollen:

$$(2) \quad \begin{array}{l} x = aX + a'Y + a''Z + \alpha, \\ y = bX + b'Y + b''Z + \beta, \\ z = cX + c'Y + c''Z + \gamma, \end{array}$$

hat man, wenn $dM = \varrho\, dX\, dY\, dZ$, die entsprechenden Integrale:

$$(3) \quad \begin{array}{llll} \int X^2 dM, & \int Y^2 dM, & \int Z^2 dM, & \\ \int YZ\, dM, & \int ZX\, dM, & \int XY\, dM, & \\ \int X\, dM, & \int Y\, dM, & \int Z\, dM, & \int dM, \end{array}$$

die wir kurz bezeichnen wollen mit:

$$(3^*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{array}{llll} A_{00}, & A_{11}, & A_{22}, & \\ A_{12}, & A_{20}, & A_{01}, & \\ A_{03}, & A_{13}, & A_{23}, & A_{33}. \end{array}$$

Will man die Integrale (1), welche von der Form sind, $\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, durch die Substitution (2) transformiren auf die neuen Variabeln X, Y, Z, so hat man die bekannten Transformationsformeln in Anwendung zu bringen:

$$\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int f(x, y, z)\, \varDelta\, dX\, dY\, dZ,$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X}, & \frac{\partial y}{\partial X}, & \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y}, & \frac{\partial y}{\partial Y}, & \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Z}, & \frac{\partial y}{\partial Z}, & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}.$$

Da in dem vorliegenden Falle der rechtwinkligen Coordinaten $\varDelta = 1$ ist, so sieht man, wenn man in (1) die Substitutionen (2) macht und entwickelt, dass die zehn Integrale (1) sich durch die zehn Integrale (3) linear ausdrücken lassen. Umgekehrt kann man auch die zehn Integrale (3) linear durch die zehn Integrale (1) ausdrücken.

Das letztere wirklich durchzuführen, verlangt zehn lineare Gleichungen mit eben so viel Unbekannten aufzulösen. Aber man braucht nur die genannten Gleichungen wirklich aufzustellen, um zu erkennen, dass in dem vorliegenden Falle eine gewisse Ermässigung dadurch herbeigeführt ist, dass die Integrale (1) gleicher Ordnung sich durch die Integrale (3) derselben Ordnung linear ausdrücken lassen. Immerhin bleiben sechs Gleichungen mit ebenso viel Unbekannten aufzulösen und überdies drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

Unter diesen Umständen werden wir es vorziehen, die Gleichungen selbst lieber gar nicht aufzustellen, vielmehr ihr Bildungsgesetz zu studiren, und aus diesem Gesetze die geometrischen Eigenschaften des Körpers zu entwickeln, von welchen die analytische Mechanik bei der Untersuchung der Bewegung des Körpers ausgeht.

Es bringt Vortheil den gegebenen Körper mit einer ganz bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung in Verbindung zu

bringen, aus welcher sich geometrische Eigenschaften des Körpers abnehmen lassen. Diese Oberfläche definiren wir durch ihre Gleichung in homogenen Ebenencoordinaten u, v, w, r, bezogen auf das ursprüngliche, rechtwinklige Coordinatensystem, in welchem das Element dm der Masse die Coordinaten x, y, z hat:

$$(4)\quad \begin{aligned} & u^2 \int x^2 dm + v^2 \int y^2 dm + w^2 \int z^2 dm + r^2 \int dm \\ & + 2vw \int yz dm + 2wu \int zx dm + 2uv \int xy dm \\ & + 2ur \int x\, dm + 2\, vr \int y\, dm + 2wr \int z\, dm = 0. \end{aligned}$$

Wir nennen diese Oberfläche zweiter Ordnung das imaginäre Bild des Körpers.

Da für die, in der Gleichung (4) durch die Zeichen angedeuteten, Integrationen die variabeln Ebenencoordinaten nur die Geltung von Constanten haben, so stellt sich die Gleichung des imaginären Bildes kürzer so dar:

$$(5) \quad \ldots\ldots \int \{ux + vy + wz + r\}^2 dm = 0,$$

und wir können sagen:

(6) .... Wenn man in der homogenen Gleichung eines Punktes in der Normalform den linken Theil der Gleichung quadrirt, mit dem Elemente der Masse des Körpers in dem Punkte multiplicirt, und über den ganzen Körper integrirt, so erhält man die Gleichung des maginären Bildes des Körpers.

Die Coefficienten der Variabeln in der entwickelten Gleichung (4) des imaginären Bildes hängen offenbar ab von der Lage des Coordinatensystemes zu dem Körper, und es scheint, dass auch das imaginäre Bild nicht allein von dem Körper, sondern auch von der Lage des Coordinatensystemes abhängig sei. Das Letztere trifft nicht zu. Vielmehr werden wir den Satz beweisen:

(7) ..... Jeder Körper hat ein imaginäres Bild, welches nur von der Beschaffenheit des Körpers abhängt.

Der Beweis, dass das imaginäre Bild des Körpers unabhängig ist von der Lage des Körpers zu dem rechtwinkligen Coordinatensysteme, worauf der Körper bezogen ist, soll in zwei Theile zerfallen. Wir werden nachweisen, dass das imaginäre Bild sich nicht ändert erstens, wenn das rechtwinklige Coordinatensystem um den Coordinatenanfangspunkt gedreht wird, und zweitens, wenn der Coordinatenanfangspunkt beliebig verlegt wird, die Richtung der Coordinatenaxen aber ungeändert bleibt.

Zu dem genannten Zwecke führen wir aus der achtzehnten Vorlesung die Transformationsformeln (11) und (23) für rechtwinklige Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte, sowohl für Punktcoordinaten als für homogene Ebenencoordinaten wieder vor:

$$(8)\quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z. \end{aligned} \qquad (9)\quad \begin{aligned} u &= aU + a'V + a''W, \\ v &= bU + b'V + b''W, \\ w &= cU + c'V + c''W, \\ r &= R. \end{aligned}$$

Machen wir nun in der Gleichung (5) des imaginären Bildes die Substitutionen (8), so drücken wir damit in der genannten Gleichung nur die Integrale (1) durch die Integrale (3) aus. Das ursprüngliche Coordinatensystem, worauf das imaginäre Bild (5) bezogen ist, bleibt davon unberührt. Machen wir aber gleichzeitig die Substitutionen (8) und (9), so transformiren wir überdies noch die Gleichung (5) des imaginären Bildes auf das zweite rechtwinklige Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte. Da nun nach (25) in der achtzehnten Vorlesung ist:

$$(10)\ldots\quad ux + vy + wz + r = UX + VY + WZ + R,$$

so geht die Gleichung (5) des imaginären Bildes, jetzt bezogen auf das zweite rechtwinklige Coordinatensystem, dadurch über in:

$$(11)\ldots\quad \int \{UX + VY + WZ + R\}^2\, dM = 0.$$

Dieses ist aber gerade die nach der Regel (6) gebildete Gleichung des imaginären Bildes für das zweite Coordinaten-

system. Die Regel giebt also für die beiden Coordinatensysteme nicht verschiedene, imaginäre Bilder desselben Körpers.

Die Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in einen Punkt, dessen Coordinaten sind $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen, wird nach (7) und (8) der dreizehnten Vorlesung analytisch vollführt durch die Substitutionen für Punktcoordinaten und Ebenencoordinaten:

$$(12)\ \ldots \quad \begin{aligned} x &= X+\alpha, \\ y &= Y+\beta, \\ z &= Z+\gamma. \end{aligned} \qquad (13) \quad \begin{aligned} u &= U, \\ v &= V, \\ w &= W, \\ r &= R-\alpha U-\beta V-\gamma W. \end{aligned}$$

Durch die Substitutionen (12) werden in der Gleichung (5) des imaginären Bildes wieder nur die Integrale (1) ersetzt durch die Integrale (3). Beide Substitutionen (12) und (13), gleichzeitig, transformiren überdies die Gleichung (5) des imaginären Bildes auf das zweite Coordinatensystem. Da aber auch die genannten Substitutionen die Gleichung (10) zu einer identischen machen, so wird (11) die Gleichung des imaginären Bildes (5), jetzt aber bezogen auf das zweite Coordinatensystem. Hieraus sieht man, wie die beiden Gleichungen (5) und (11) wieder dieselbe Oberfläche zweiter Ordnung analytisch ausdrücken, nur auf verschiedene Coordinatensysteme bezogen.

Den Transformationsformeln (2) von Punktcoordinaten für irgend zwei rechtwinklige Coordinatensysteme entsprechen folgende Transformationsformeln für homogene Ebenencoordinaten:

$$(14)\ \ldots \quad \begin{aligned} u &= aU+a'V+a''W, \\ v &= bU+b'V+b''W, \\ w &= cU+c'V+c''W, \\ r &= R-\alpha(aU+a'V+a''W), \\ &\qquad -\beta(bU+b'V+b''W), \\ &\qquad -\gamma(cU+c'V+c''W), \end{aligned}$$

welche mit jenen die Gleichung (10) zu einer identischen machen. Sie transformiren also den linken Theil der Glei-

chung (5) in den linken Theil der Gleichung (11). Das will sagen, dass die Substitutionen (14) folgende Gleichung zu einer identischen machen:

$$(15) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} &a_{00}u^2 + 2a_{01}\,uv + \ldots + a_{33}r^2, \\ &= A_{00}U^2 + 2A_{01}UV + \ldots + A_{33}R^2. \end{aligned}$$

Diese, durch die Substitutionen (14) identische, Gleichung löset sich nun in die zehn linearen Gleichungen auf, von welchen am Anfange unserer Untersuchung die Rede war.

Es ist eine, in der dreizehnten Vorlesung bewiesene Regel, dass man die Gleichung des Mittelpunktes einer Oberfläche zweiter Ordnung erhält, wenn man die, in homogenen Ebenencoordinaten gegebene, Gleichung der Oberfläche nach der letzten Coordinate partiell differentiirt. Hiernach wird die Gleichung des Mittelpunktes des imaginären Bildes (5) folgende:

$$(16) \ldots\ldots \quad \int \{ux + vy + wz + r\} \cdot dm = 0.$$

woraus sich die Coordinaten des Mittelpunktes ergeben:

$$\frac{\int x\,dm}{\int dm}, \qquad \frac{\int y\,dm}{\int dm}, \qquad \frac{\int z\,dm}{\int dm}.$$

Da dieses bekanntlich die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers sind, so hat man den Satz:

(17) . . . . Der Mittelpunkt des imaginären Bildes eines Körpers fällt mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen.

Unter Axen eines Körpers versteht man die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes X, Y, Z, in Rücksicht auf welches folgende drei Integrale verschwinden:

$$(18) \quad A_{12} = \int YZ dM, \quad A_{20} = \int ZX dM, \quad A_{01} = \int XY dM.$$

Auf Grund dieser Definition stellen wir uns nun die Aufgabe:

(19) . . . . Die Axen eines Körpers zu bestimmen, welche von dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes ausgehen, auf welches der Körper bezogen ist.

Dieses Problem verlangt die Bestimmung von Transformationsformeln (9) für rechtwinklige Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte der Art, dass in der Gleichung (15) auf der rechten Seite die drei Glieder verschwinden, welche die Coefficienten (18) haben. Die Axen des zweiten Coordinatensystemes werden dann die gesuchteu Axen des Körpers sein.

Wenn wir demnach mit $\varphi(u, v, w)$ die Summe der sechs in u, v, w homogenen Glieder auf der linken Seite der Gleichung (15) bezeichnen, so lässt sich das Problem so auffassen: Die Substitutionen (9) zu bestimmen, welche folgende Gleichungen zu identischen Gleichungen machen:

$$(20) \ldots \quad \begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= U^2 + V^2 + W^2, \\ \varphi(u, v, w) &= \lambda U^2 + \lambda_1 V^2 + \lambda_2 W^2. \end{aligned}$$

Wir weisen auf die neunzehnte Vorlesung hin, in welcher das Problem ausführlich behandelt worden ist. Es führte zurück auf die Gleichungen:

$$(21) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} (a_{00} - \lambda)a + a_{01}b + a_{02}c &= 0, \\ a_{10}a + (a_{11} - \lambda)b + a_{12}c &= 0, \\ a_{20}a + a_{21}b + (a_{22} - \lambda)c &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen durch Elimination von a, b, c die kubische Gleichung $\Delta = 0$ hervorging, deren Wurzeln eben jene Coefficienten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ in (20) sind.

Die, durch die Gleichungen (21) bestimmten, Verhältnisse von $a : b : c$ werden dann die Verhältnisse der Cosinus der Winkel sein, welche eine der drei, vom Coordinatenanfangspunkt ausgehenden, Axen des Körpers mit den Coordinatenaxen bildet.

Da der Anfangspunkt des Coordinatensystemes, auf welches der Körper bezogen ist, beliebig gewählt werden kann, so haben wir nach dem Vorhergehenden den Satz:

(22) . . . Von einem jeden Punkte des Raumes gehen drei bestimmte, auf einander senkrecht stehende Axen eines gegebenen Körpers aus.

Die Lage dieser Axensysteme eines und desselben Körpers für die verschiedenen Ausgangspunkte zu erforschen, soll unsere Aufgabe sein.

Man nennt Hauptaxen eines Körpers die drei auf einander senkrecht stehenden Axen eines Körpers, welche von dem Schwerpunkte des Körpers ausgehen.

Nachdem wir im Vorhergehenden gezeigt haben, wie die Axen eines Körpers zu bestimmen sind, welche von dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes ausgehen, auf welches der Körper bezogen ist, so wollen wir, die Kenntniss dieser Axen voraussetzend, jetzt annehmen, dass die Axen des Coordinatensystemes zugleich die Axen des Körpers seien.

In dieser Voraussetzung sind $a_{12} = a_{20} = a_{01} = 0$, und die Gleichung des imaginären Bildes des Körpers stellt sich in der einfacheren Gestalt dar:

$$a_{00} u^2 + a_{11} v^2 + a_{22} w^2 + a_{33} r^2$$
$$+ 2 a_{03} uv + 2 a_{13} vr + 2 a_{23} wr = 0.$$

Da nach (17) die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers sind:

$$(23) \ldots \quad \alpha = \frac{a_{03}}{a_{33}}, \quad \beta = \frac{a_{13}}{a_{23}}, \quad \gamma = \frac{a_{23}}{a_{33}}$$

und $a_{33} = m =$ der Masse des Körpers, so hat man die Gleichung des imaginären Bildes:

$$(24) \ldots \quad \begin{aligned} & a_{00} u^2 + a_{11} v^2 + a_{22} w^2 + m r^2 \\ & + 2m(\alpha u + \beta v + \gamma w) r = 0. \end{aligned}$$

Wir haben dieses vorausgeschickt, um die Auflösung der folgenden Aufgabe vorzubereiten:

(25) . . . Die Hauptaxen eines Körpers zu bestimmen, wenn derselbe bezogen ist auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen die Axen des Körpers sind, welche von dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes ausgehen.

Diese Aufgabe lässt sich zurückführen auf die vorher-

gehende (19) dadurch, dass man die Gleichung (24) des imaginären Bildes des Körpers, bezogen auf irgend ein Axensystem des Körpers, transformirt durch die Substitutionen (13) auf ein, dem vorausgesetzten Systeme paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt aber der Schwerpunkt des Körpers ist, mit den Coordinaten α, β, γ, deren Werthe in (23) angegeben sind.

Durch diese Substitutionen geht die Gleichung (24) des imaginären Bildes über in die Form:

$$(26)\ \ldots\quad \begin{array}{c} A_{00}U^2 + A_{11}V^2 + A_{22}W^2 + A_{33}R^2 \\ + 2A_{12}UV + 2A_{20}WU + 2A_{01}UV = 0. \end{array}$$

Die mit der ersten Potenz der Variable R multiplicirten Glieder in dieser Gleichung müssen darum fehlen, weil der Anfangspunkt des neuen Coordinatensystemes, der Schwerpunkt des Körpers, nach (17) mit dem Mittelpunkte der Oberfläche (26) zusammenfällt.

Da die Substitutionen (13) die Gleichung (24) transformiren in (26), so hat man:

$$\begin{array}{lll} A_{00} = a_{00} - m\alpha^2, & A_{12} = - m\beta\gamma, & \\ A_{11} = a_{11} - m\beta^2, & A_{20} = - m\gamma\alpha, & A_{33} = m, \\ A_{22} = a_{22} - m\gamma^2, & A_{01} = - m\alpha\beta. & \end{array}$$

Setzt man diese Werthe der Grössen A in die Gleichung (26) und verändert die grossen Buchstaben U, V, W, R in die kleinen, so erhält man die Gleichung:

$$(27)\ \ldots\ldots\quad \begin{array}{c} a_{00}u^2 + a_{11}v^2 + a_{22}w^2 + mr^2 \\ - m(\alpha u + \beta v + \gamma w)^2 = 0 \end{array}$$

des imaginären Bildes (24), jetzt aber bezogen auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des Körpers ist.

Da hierdurch der Körper selbst angesehen werden kann als bezogen auf das letztere Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des Körpers ist, so handelt es sich jetzt nur um die, von dem Anfangspunkte des Coordinaten-

systemes ausgehenden, Axen des Körpers, welche in der Aufgabe (19) bestimmt wurden.

Die mit $\varphi(u, v, w)$ bezeichnete Function dort, wird hier der linke Theil der Gleichung (27), mit Ausschluss des Gliedes mr^2, sein.

Die, die Aufgabe lösenden Gleichungen (21) werden in dem vorliegenden Falle folgende:

$$(28) \quad \begin{aligned} (a_{00} - \lambda)a &= m\alpha(\alpha a + \beta b + \gamma c), \\ (a_{11} - \lambda)b &= m\beta(\alpha a + \beta b + \gamma c), \\ (a_{22} - \lambda)c &= m\gamma(\alpha a + \beta b + \gamma c); \end{aligned}$$

und das Resultat der Elimination von a, b, c, die kubische Gleichung $\Delta = 0$, ergiebt sich, wenn man die Gleichungen multiplicirt mit $\frac{\alpha}{a_{00} - \lambda}$, $\frac{\beta}{a_{11} - \lambda}$, $\frac{\gamma}{a_{22} - \lambda}$ und hierauf sämmtliche Gleichungen addirt:

$$(29) \quad \frac{1}{m} = \frac{\alpha^2}{a_{00} - \lambda} + \frac{\beta^2}{a_{11} - \lambda} + \frac{\gamma^2}{a_{22} - \lambda}.$$

Unsere Aufgabe (25) führt also auf diese kubische Gleichung (29) zurück. Nach Feststellung ihrer Wurzeln ergeben sich dann die Verhältnisse a, b, c der Cosinus der Winkel, welche die Hauptaxen des Körpers mit den Coordinatenaxen bilden, durch Auflösung der linearen Gleichungen (28).

Gehen wir nun auf die geometrische Deutung der kubischen Gleichung (29), von welcher die Lösung unserer Aufgabe abhängig gemacht wurde, näher ein. Es bedeuten in dieser Gleichung α, β, γ die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers in demjenigen Coordinatensysteme, in welchem die Gleichung (24) der analytische Ausdruck ist für das imaginäre Bild des Körpers. Lassen wir aber α, β, γ die Coordinaten eines variabeln Punktes bedeuten, so ist die Gleichung (29) der analytische Ausdruck für alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche mit der folgenden confocal sind:

$$(30) \quad \frac{1}{m} = \frac{\alpha^2}{a_{00}} + \frac{\beta^2}{a_{11}} + \frac{\gamma^2}{a_{22}}.$$

Durch den Schwerpunkt des Körpers lassen sich nun drei mit dieser Oberfläche confocale Oberflächen legen, welche

sich, wie bekannt, senkrecht schneiden. Dieses sind gerade die drei confocalen Oberflächen, welche den drei Wurzeln der kubischen Gleichung (29) entsprechen und ihre Normalen in dem Schwerpunkte des Körpers stellen sich dann dar als die gesuchten Hauptaxen des Körpers.

Diese Bemerkungen machen es wahrscheinlich, dass zwischen den verschiedenen Axensystemen eines und desselben Körpers und den confocalen Oberflächen eine nahe Beziehung obwalte. Letztere wird sich von selbst ergeben mit der Lösung der folgenden Aufgabe:

(31) . . . . . Die Axen eines Körpers zu bestimmen, welche von einem gegebenen Punkte des Raumes ausgehen, wenn der Körper bezogen ist auf dasjenige Coordinatensystem, dessen Axen die Hauptaxen des Körpers sind.

Unter der, in der Aufgabe hervorgehobenen, Bedingung stellt sich die Gleichung des imaginären Bildes des Körpers dar in der Form:

$$(32) \quad \ldots \quad a_{00}u^2 + a_{11}v^2 + a_{22}w^2 + mr^2 = 0$$

oder in Punktcoordinaten ausgedrückt:

$$(33) \quad \ldots \ldots \quad -\frac{1}{m} = \frac{x^2}{a_{00}} + \frac{y^2}{a_{11}} + \frac{z^2}{a_{22}}.$$

Es ist dieses die Gleichung eines imaginären Ellipsoides, weil sämmtliche Coefficienten in der Gleichung (32) ihrer Natur nach positive Grössen sind.

Da hiernach alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche imaginäre Bilder von Körpern darstellen, nur imaginäre Ellipsoide sind, so rechtfertiget sich hier die am Anfange der Vorlesung gewählte Bezeichnung des imaginären Bildes eines Körpers.

Sind nun α, β, γ die Coordinaten eines gegebenen Punktes, von welchem die gesuchten Axen des Körpers ausgehen sollen, so führen wir die vorliegende Aufgabe wieder auf die Aufgabe (19) zurück, wenn wir ein, dem gegebenen paralleles Coordinatensystem zum Grunde legen, dessen Anfangspunkt der in der Aufgabe gegebene Punkt ist.

Dieses geschieht durch die Substitutionen (13), durch welche die Gleichung (32) des imaginären Bildes des Körpers übergeht in:

$$(34) \; \dots \quad a_{00} u^2 + a_{11} v^2 + a_{22} w^2 + m(r - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = 0 \,,$$

wenn man zugleich für die grossen Buchstaben U, V, W, R die kleinen setzt.

Wir bemerken hier, dass die, für die Lösung der Aufgabe massgebende Function $\varphi(u, v, w)$ sich von der ihr entsprechenden der vorhergehenden Aufgabe (25) nur durch das Vorzeichen von m unterscheidet. Darum können wir auch die, unsere Aufgabe lösenden, Gleichungen aus den Gleichungen (28) und (29) unmittelbar abschreiben wie folgt:

$$(35) \; \dots \quad \begin{aligned} (a_{00} - \lambda) a &= - m\alpha(\alpha a + \beta b + \gamma c) \,, \\ (a_{11} - \lambda) b &= - m\beta(\alpha a + \beta b + \gamma c) \,, \\ (a_{22} - \lambda) c &= - m\gamma(\alpha a + \beta b + \gamma c) . \end{aligned}$$

$$(36) \; \dots \quad -\frac{1}{m} = \frac{\alpha^2}{a_{00} - \lambda} + \frac{\beta^2}{a_{11} - \lambda} + \frac{\gamma^2}{a_{22} - \lambda} \,.$$

Die vorliegende Aufgabe führt also wieder auf eine kubische Gleichung (36) zurück, nach deren Auflösung sich die Verhältnisse $a : b : c$ der Cosinus der Winkel aus (35) ergeben, welche das von dem gegebenen Punkte ausgehende Axensystem des Körpers mit den Hauptaxen desselben bildet.

Die kubische Gleichung (36) hat nur reelle Wurzeln. Wir schliessen dieses aus der Uebereinstimmung der Form der Gleichung mit der ersten Gleichung (8) in der zweiundzwanzigsten Vorlesung, von welcher dort die reellen Grenzen der Wurzeln angegeben sind.

Verstehen wir unter α, β, γ variable Coordinaten eines Punktes in dem Coordinatensysteme, dessen Axen die Hauptaxen des Körpers sind, so ist die Gleichung (36) der analytische Ausdruck für alle, mit dem imaginären Bilde (33) des Körpers confocalen Oberflächen. Den drei Wurzeln der kubischen Gleichung entsprechen dann die drei confocalen Oberflächen, welche durch den, in der Aufgabe gegebenen Punkt gehen.

Die vorliegende Aufgabe (31) führt demnach, rein geometrisch gefasst, darauf zurück: **die drei, mit dem imaginären Bilde des Körpers confocalen Oberflächen zu bestimmen, welche durch den gegebenen Punkt gehen.** Die Normalen dieser Oberflächen in dem gegebenen Punkte werden die gesuchten Axen des Körpers sein. Denn die Cosinus der Winkel, welche eine von diesen Normalen mit den Coordinatenaxen bildet, verhalten sich wie:

$$\frac{\alpha}{a_{00}-\lambda} : \frac{\beta}{a_{11}-\lambda} : \frac{\gamma}{a_{22}-\lambda},\ .$$

gerade so, wie die aus (35) zu bestimmenden Grössen a, b, c.

Diese geometrischen Betrachtungen dienen zur einfachsten, algebraischen Auflösung der folgenden Aufgabe:

(37) . . . . . **Die Axen eines Körpers zu bestimmen, welche von einem gegebenen Punkte des Raumes ausgehen, wenn der Körper bezogen ist auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem.**

Wir brauchen zur Auflösung der Aufgabe die Gleichung des imaginären Bildes in dem zum Grunde gelegten Coordinatensysteme:

(38) . . . . $F(u, v, w, r) = 0.$

Irgend eine, mit dieser Oberfläche confocale, wird nach (11) der vorhergehenden Vorlesung ausgedrückt durch die Gleichung:

(39) . . . $F(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$

Uebertragen wir dieselbe in Punktcoordinaten, indem wir nach bekannter Regel setzen:

$$\tfrac{1}{2}F'(u) + \lambda u = x, \quad \tfrac{1}{2}F'(w) + \lambda w = z,$$
$$\tfrac{1}{2}F'(v) + \lambda v = y, \quad \tfrac{1}{2}F'(r) \qquad = p,$$

so erhalten wir eine Gleichung:

(40) . . . . $f(x, y, z, p) = 0,$

welche, in Rücksicht auf λ vom dritten Grade, alle Ober-

flächen darstellt, welche mit dem imaginären Bilde (38) des Körpers confocal sind.

Wenn wir nun in der letzten Gleichung (40) für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des, in der Aufgabe gegebenen Punktes setzen, so erhalten wir die kubische Gleichung, von welcher die Auflösung der Aufgabe abhängt. Den drei Wurzeln der kubischen Gleichung entsprechen die drei confocalen Oberflächen (40), welche durch den, in der Aufgabe gegebenen Punkt gehen. Ihre Normalen in dem gegebenen Punkte sind die gesuchten Axen des Körpers.

Wenn in unserer Aufgabe (37) der gegebene Punkt der Schwerpunkt des Körpers ist, so vereinfacht sich die Auflösung der Aufgabe dahin, dass man nur die drei Werthe von λ zu bestimmen braucht, für welche die Gleichung (39) eine Grenzfläche wird. Die Ebenen der drei Grenzflächen schneiden sich dann in den Hauptaxen des Körpers.

Ueberlegen wir zum Schlusse, ob es denn nothwendig oder vortheilhaft war, am Anfange der Vorlesung das imaginäre Bild des Körpers einzuführen.

Da die Bestimmung der Axensysteme eines und desselben Körpers auf ein, durch den Körper bestimmtes System confocaler Oberflächen hinauskommt, so kann man für das Bild des Körpers irgend eine von den confocalen Oberflächen wählen. Das Bild des Körpers braucht darum nicht ein imaginäres Ellipsoid zu sein.

Als das einfachste reelle Bild erscheint diejenige Grenzfläche unter den confocalen Oberflächen, welche von einer Ellipse umschlossen ist. Dieses Bild des Körpers wollten wir aber darum nicht wählen, weil es sich nur durch eine kubische Gleichung definiren lässt, wenn der Körper bezogen ist auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem.

Irgend ein anderes reelles Ellipsoid aus der Schaar der confocalen Oberflächen leistet zwar für unsere Zwecke ganz dasselbe, aber es giebt unter den confocalen Oberflächen keine einzige, welche sich dem Körper analytisch so anschmiegt, als das im Anfange der Vorlesung definirte, imaginäre Bild des Körpers.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Geometrische Deutung der kubischen Gleichung $\Delta = 0$, von welcher die Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängen.

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung einen Mittelpunkt hat, so lässt sich ihre, in Punktcoordinaten gegebene, Gleichung durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in den Mittelpunkt der Oberfläche, mit Beibehaltung der Richtung der rechtwinkligen Coordinatenaxen, wie man in der dreizehnten Vorlesung gesehen hat, immer auf die Form zurückführen:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi(x, y, z) - 1 = 0,$$

in welcher Gleichung $\varphi(x, y, z)$ einen Ausdruck bedeutet von der Form:

$$(2) \quad \varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy.$$

Durch Drehung des rechtwinkligen Coordinatensystemes um den Mittelpunkt der Oberfläche führten wir in der neunzehnten Vorlesung, indem die Function $\varphi(x, y, z)$, ausgedrückt durch die neuen rechtwinkligen Coordinaten, die Gestalt erhielt:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$$

die Gleichung (1) der Oberfläche auf die Hauptaxen zurück:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 - 1 = 0.$$

Die von der Oberfläche auf den Hauptaxen abgeschnittenen Stücke:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

sind die Hauptaxen der Oberfläche ihrer Grösse nach.

Diese Grössen hängen offenbar ab von der, in der neunzehnten Vorlesung unter (11) aufgeführten, kubischen Gleichung $\Delta = 0$, welche nach Potenzen von λ entwickelt:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -\Delta = \lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0$$

folgende Werthe der Coefficienten giebt:

$$(6) \quad \begin{aligned} A &= a_{00} + a_{11} + a_{22}, \\ B &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{22}a_{00} - a_{20}^2) + (a_{00}a_{11} - a_{01}^2), \\ C &= a_{00}a_{11}a_{22} + 2a_{12}a_{20}a_{01} - a_{00}a_{12}^2 - a_{11}a_{20}^2 - a_{22}a_{01}^2. \end{aligned}$$

Lässt man nun die sechs Coefficienten in der Function (2) $\varphi(x, y, z)$ beliebig variiren, so stellt die Gleichung (1) alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung mit demselben Mittelpunkt dar. Lässt man aber jene sechs Coefficienten unter der Beschränkung variiren, dass die Ausdrücke (6) A, B, C ungeändert bleiben, so stellt die Gleichung (1) nur solche Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche gleich grosse Hauptaxen haben, oder, mit anderen Worten, die Gleichung (1) ist unter der gemachten Voraussetzung der analytische Ausdruck für eine und dieselbe Oberfläche, beliebig gedreht um ihren Mittelpunkt.

Von der Voraussetzung ausgehend, dass A, B, C unveränderliche Grössen seien, wollen wir nun die geometrische Bedeutung dieser Grössen feststellen.

Bezeichnen wir mit P, Q, R die Längen der auf den Coordinaten x, y, z von der Oberfläche (1) abgeschnittenen Stücke, so haben wir:

$$P^2 = \frac{1}{a_{00}}, \qquad Q^2 = \frac{1}{a_{11}}, \qquad R^2 = \frac{1}{a_{22}}.$$

Es ist demnach:

$$A = a_{00} + a_{11} + a_{22} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2} + \frac{1}{R^2}.$$

Da aber A der Voraussetzung nach eine constante Grösse ist, so drückt diese Gleichung den Satz aus:

Wenn man um den Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung ein System von drei, in dem Mittel-

punkte auf einander senkrecht stehenden, geraden Linien dreht, so ist die Summe der reciproken Quadrate der von der Oberfläche auf den geraden Linien abgeschnittenen Stücke eine constante Grösse.

Diese constante Grösse lässt sich näher bezeichnen. Denn wenn man das System von drei, in dem Mittelpunkte der Oberfläche auf einander senkrecht stehenden Linien in die Lage der Hauptaxen bringt, so werden jene auf ihnen abgeschnittenen Stücke die Hauptaxen selber.

Als Corollar zu dem angegebenen Satze bezeichnen wir folgenden:

Wenn man um den Mittelpunkt eines Kegelschnittes einen rechten Winkel dreht, dessen Spitze im Mittelpunkte liegt, so ist die Summe der reciproken Quadrate der, von dem Kegelschnitte auf den Schenkeln des rechten Winkels abgeschnittenen Stücke eine constante Grösse.

Dieser Satz geht hervor aus dem vorhergehenden, wenn man die Richtung der einen von den drei, im Mittelpunkte der Oberfläche auf einander senkrecht stehenden geraden Linien ungeändert lässt, und die Drehung macht um diese ungeänderte, gerade Linie.

Wir erhalten die Gleichung des Kegelschnittes, in welchem die yz Ebene die Oberfläche (1) schneidet, wenn wir in der Gleichung der Oberfläche $x = 0$ setzen:

$$a_{11}y^2 + 2a_{12}yz + a_{22}z^2 - 1 = 0.$$

Die Hauptaxen dieses Kegelschnittes hängen ab von der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher das von λ freie Glied gerade der erste Theil des Ausdruckes B in (6) ist:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Dieses Glied ist das Product der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, und da die Wurzeln die reciproken Quadrate der Hauptaxen des Kegelschnittes ausdrücken, so stellt der letzte Ausdruck durch π^2 dividirt, nach (39) der einundzwanzigsten Vorlesung, das reciproke Quadrat des Flächeninhaltes des Kegelschnittes dar, wenn derselbe eine Ellipse ist.

Die Bedeutung der beiden anderen Glieder, aus welchen der Ausdruck B in (6) zusammengesetzt ist, ergiebt sich hiernach von selbst. Dividiren wir nun B durch π^2 und bemerken, dass bei der Drehung der Oberfläche um ihren Mittelpunkt der Quotient ungeändert bleibt, so haben wir den Satz:

Wenn man um den Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung drei, in diesem Punkte auf einander senkrecht stehende, Ebenen dreht, so schneiden die drei Ebenen die Oberfläche in drei Kegelschnitten, von welchen die Summe der reciproken Quadrate der Flächeninhalte eine constante Grösse ist.

Wenn einer von den drei Kegelschnitten eine Hyperbel oder Parabel wird, so hört die Gültigkeit des Satzes selbstverständlich auf. Er trifft aber wieder zu, wenn man die Drehung in der Weise bewerkstelliget, dass die Hyperbel oder Parabel ungeändert bleibt.

Was endlich die Bedeutung des Coefficienten C in der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ anbetrifft, so weiss man, dass derselbe gleich ist dem Produkt der drei Wurzeln der Gleichung, also gleich dem reciproken Produkt aus den Quadraten der Hauptaxen der Oberfläche. Dividirt man daher den Coefficienten C durch $(\frac{4}{3}\pi)^2$, so erhält man nach (56) der zweiundzwanzigsten Vorlesung das reciproke Quadrat des körperlichen Inhaltes der Oberfläche, vorausgesetzt, dass die Oberfläche ein Ellipsoid ist.

Die Mittelpunktgleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, durch Ebenencoordinaten ausgedrückt, erhält man, wenn man

die, der Function $\varphi(x, y, z)$ reciproke Function $\Phi(u, v, w)$ bildet, und hierauf setzt:

$$(7) \quad \Phi(u, v, w) - 1 = 0.$$

Wenn wir von dieser, durch Ebenencoordinaten ausgedrückten Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte ausgehen, so können wir ebenfalls die kubische Gleichung $\Delta = 0$ angeben, von welcher die Hauptaxen der Oberfläche abhängen. Die geometrische Deutung der Coefficienten in dieser kubischen Gleichung muss auf Sätze führen, dié den vorhergehenden Sätzen analog sind.

Wir bemerken, um die angegebene Idee zu verwirklichen, dass, während die Substitutionen (14) der achtzehnten Vorlesung die Function $\varphi(x, y, z)$ transformiren in (3), die Substitutionen (23) derselben Vorlesung die reciproke Function $\Phi(u, v, w)$:

$$(8) \quad \Phi(u, v, w) = e_{00}u^2 + e_{11}v^2 + e_{22}w^2 + 2e_{12}vw + 2e_{20}wu + 2e_{01}uv,$$

nach den Auseinandersetzungen in der zwanzigsten Vorlesung transformiren in:

$$(9) \quad \Phi(u, v, w) = \frac{U^2}{\lambda_0} + \frac{V^2}{\lambda_1} + \frac{W^2}{\lambda_2}.$$

Es ist demnach:

$$(10) \quad \frac{U^2}{\lambda_0} + \frac{V^2}{\lambda_1} + \frac{W^2}{\lambda_2} - 1 = 0$$

die Gleichung der Oberfläche (7), bezogen auf das Hauptaxensystem dieser Oberfläche; und die kubische Gleichung $\Delta = 0$, von welcher die Transformation abhängt, ist:

$$(11) \quad \Delta = \begin{vmatrix} e_{00} - \frac{1}{\lambda}, & e_{01}, & e_{02} \\ e_{10}, & e_{11} - \frac{1}{\lambda}, & e_{12} \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22} - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung entwickeln, wie folgt:

$$(12) \quad \dots \quad -\Delta = \frac{1}{\lambda^3} - a\frac{1}{\lambda^2} + b\frac{1}{\lambda} - c = 0,$$

so finden wir die Werthe der Coefficienten a, b, c:

$$(13) \quad \begin{aligned} a &= e_{00} + e_{11} + e_{22}, \\ b &= (e_{11}e_{22} - e_{12}^2) + (e_{22}e_{00} - e_{20}^2) + (e_{00}e_{11} - e_{01}^2), \\ c &= e_{00}e_{11}e_{22} + 2e_{12}e_{20}e_{01} - e_{00}e_{12}^2 - e_{11}e_{20}^2 - e_{22}e_{01}^2. \end{aligned}$$

Wir lassen nun die sechs Coefficienten e in der Gleichung (7) der Oberfläche beliebig variiren und erhalten dadurch alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung mit demselben Mittelpunkte. Beschränken wir aber diese Variationen, indem wir festsetzen, dass die drei Coefficienten a, b, c in (13) unverändert bleiben, so stellt die Gleichung (7) eine und dieselbe Oberfläche zweiter Ordnung dar in allen möglichen Lagen nach der Drehung um den Mittelpunkt.

Die verschiedenen Lagen einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung wollen wir nun in das Auge fassen.

Zu diesem Zwecke legen wir drei Tangentenebenen an die Oberfläche (7) den Coordinatenebenen parallel, und bestimmen die senkrechteu Abstände p, q, r derselben von dem Mittelpunkte der Oberfläche aus der Gleichung (7):

$$p^2 = e_{00}, \quad q^2 = e_{11}, \quad r^2 = e_{22}.$$

Hiernach ist:

$$a = e_{00} + e_{11} + e_{22} = p^2 + q^2 + r^2,$$

welche Gleichung ausdrückt, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen des Mittelpunktes der Oberfläche zweiter Ordnung von irgend drei auf einander senkrecht stehenden Tangentenebenen derselben eine constante Grösse ist.

Wir können diesen Satz auch so auffassen:

Der geometrische Ort des Schnittpunktes dreier, auf einander senkrecht stehenden, Tangentenebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung ist eine Kugel, deren Mittelpunkt in dem Mittelpunkte der Oberfläche liegt.

Wenn wir, indem wir in der Gleichung (7) der Oberfläche $u = 0$ setzen, die Oberfläche senkrecht auf die yz Ebene projiciren, so erhalten wir die Gleichung der Projection:

$$c_{11} v^2 + 2 c_{12} v w + c_{22} w^2 - 1 = 0,$$

welche einen Kegelschnitt ausdrückt, dessen Hauptaxen von der quadratischen Gleichung abhängen:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{1}{\lambda}, & c_{12} \\ c_{21}, & c_{22} - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Das in der Entwickelung dieser Gleichung nach Potenzen von $\frac{1}{\lambda}$ mit der 0ten Potenz multiplicirte Glied:

$$c_{11} c_{22} - c_{12}^2,$$

welches den ersten Theil des Ausdruckes b in (13) bildet, ist das Quadrat des Productes der Hauptaxen des Kegelschnittes. Wir erhalten daher das Quadrat des Flächeninhaltes der Projection, wenn wir jenen Ausdruck noch mit π^2 multipliciren.

Multipliciren wir nun die ganze zweite Gleichung (13) mit π^2 und bemerken, dass $b\pi^2$ sich bei der Drehung der Oberfläche um den Mittelpunkt nicht ändert, so ergiebt sich aus der geometrischen Deutung der einzelnen Theile jener Gleichung der Satz:

Wenn man eine Oberfläche zweiter Ordnung auf irgend drei auf einander senkrecht stehende Ebenen projicirt, so ist die Summe der Quadrate der senkrechten Projectionen eine constante Grösse.

Es lässt sich dieser Satz als eine Ausdehnung des Satzes (5) der ersten Vorlesung auffassen. Denn, verstehen wir unter Flächeninhalt einer Oberfläche zweiter Ordnung die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der senkrechten Projectionen der Oberfläche auf bestimmte drei, auf einander senkrecht stehende Ebenen und bezeichnen dieselben mit Δ; bezeichnen wir ferner mit A, B, C die senkrechten Projectionen der Oberfläche auf irgend drei, auf einander senkrecht stehende Ebenen, so haben wir jene in (5) der ersten Vor-

lesung aufgeführte Gleichung, die dort nur Geltung hatte, wenn die Oberfläche zweiter Ordnung eine Grenzfläche war.

Der angegebene Satz gilt ohne Einschränkung für das Ellipsoid. Ist bei einer anderen Oberfläche zweiter Ordnung eine der senkrechten Projectionen der Oberfläche eine Hyperbel oder Parabel, so verlangt der Satz eine leicht anzugebende Modification.

Was endlich den Coefficienten c in der kubischen Gleichung (12) anbelangt, so weiss man, dass derselbe das Quadrat ist des Productes der Hauptaxen der Oberfläche. Multiplicirt man diesen Coefficienten mit $(\frac{4}{3}\pi)^2$, so erhält man nach (56) der zweiundzwanzigsten Vorlesung das Quadrat des körperlichen Inhaltes der Oberfläche, vorausgesetzt, dass die Oberfläche ein Ellipsoid ist.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Bedingungen für die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung.

Bei Gelegenheit der Hauptaxenbestimmung einer durch ihre Gleichung $f(x, y, z, 1) = 0$ gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in der neunzehnten Vorlesung haben wir die Bedingungen (39) $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung festgestellt, welche, mit Hülfe von (27) durch die Coefficienten in der gegebenen Gleichung ausgedrückt, folgende Gestalt erhalten:

$$\frac{a_{01}a_{02} - a_{00}a_{12}}{a_{12}} = \frac{a_{12}a_{10} - a_{11}a_{20}}{a_{20}} = \frac{a_{20}a_{21} - a_{22}a_{01}}{a_{01}}.$$

Wir werden im Folgenden, indem wir die Entstehung der Rotationsoberflächen zweiter Ordnung ins Auge fassen, dieselben Bedingungsgleichungen auf einem anderen Wege herleiten.

Eine Rotationsoberfläche entsteht im Allgemeinen, wenn eine Curve sich um eine feste Axe dreht. Die Curve beschreibt dann die Rotationsoberfläche, indem jeder Punkt derselben einen Kreis durchläuft, dessen Ebene senkrecht steht auf der Rotationsaxe, und dessen Mittelpunkt auf der Rotationsaxe liegt. Daher schneiden alle auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebenen die Rotationsoberfläche in Kreisen, deren Mittelpunkte in der Rotationsaxe liegen. Die Rotationsoberfläche zweiter Ordnung wird von jeder auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebene nur in einem Kreise geschnitten, weil eine jede gerade Linie in der Ebene des Kreises die Oberfläche nur in zwei Punkten schneidet.

Dieses vorausgeschickt, sei nun:

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad f(x, y, z, 1) = 0$$

die Gleichung irgend einer Rotationsoberfläche zweiter Ordnung, indem wir festsetzen, dass:

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x,y,z,1) &= \varphi(x,y,z) + 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33}, \\ \varphi(x,y,z) &= a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy. \end{aligned}$$

Es seien ferner:

$$(3) \quad \dots\dots \quad \begin{aligned} A_0 &= \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta_0 = 0, \\ A_1 &= \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta_1 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen von zwei beliebigen, auf der Rotationsaxe der Oberfläche (1) senkrecht stehenden, Ebenen in der Normalform, welche die Oberfläche also in Kreisen schneiden. Da die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, die Rotationsaxe, senkrecht auf den Ebenen steht, in welchen die Mittelpunkte liegen, so wird man, wenn man setzt:

$$(4) \quad \dots \quad K = (x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 - R^2,$$

immer eine Kugel $K = 0$ bestimmen können, auf welcher beide Kreise liegen.

Man hat daher drei Oberflächen zweiter Ordnung, die gegebene Oberfläche (1) $f(x, y, z, 1) = 0$, die Kugel $K = 0$ und das Ebenenpaar $A_0 A_1 = 0$, von welchen jede durch die

Schnittcurve der beiden anderen geht, und daher nach den Auseinandersetzungen in der neunten Vorlesung die identische Gleichung:

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad f(x, y, z, 1) - \lambda K = \mu A_0 A_1.$$

Diese identische Gleichung ist die Bedingung für die Rotationsoberfläche (1). Das will sagen, dass die Oberfläche (1) eine Rotationsoberfläche sei, wenn die elf Constanten λ, A, B, C, R, μ, α, β, γ, δ_0, δ_1 sich so bestimmen lassen, dass der Gleichung (5) identisch genügt wird.

Da zwischen den Constanten α, β, γ noch die Gleichung besteht $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, so vertreten die elf Constanten nur die Stelle von zehn Constanten, welche durch eben so viele Gleichungen bestimmt werden. Da aber die identische Gleichung (5) durch Gleichsetzen der Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln sich in zehn Bedingungsgleichungen auflöst, so hat es den Anschein, als könne diesen zehn Gleichungen immer genügt werden, welcher Art auch die gegebene Oberfläche (1) sei. Allein, wenn man beachtet, dass in die sechs Bedingungsgleichungen, welche sich durch Gleichsetzen der correspondirenden Glieder der zweiten Ordnung in der identischen Gleichung (5) ergeben, nur die fünf Constanten λ, μ, α, β, γ eingehen, zwischen welchen noch die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ besteht, so sieht man, dass durch Elimination der fünf Constanten aus den sieben Gleichungen sich zwei Bedingungsgleichungen ergeben müssen.

Setzen wir nämlich die correspondirenden Glieder der zweiten Ordnung in der identischen Gleichung (5) einander gleich, so erhalten wir:

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{aligned} a_{00} - \lambda &= \mu\alpha^2, & a_{12} &= \mu\beta\gamma, \\ a_{11} - \lambda &= \mu\beta^2, & a_{20} &= \mu\gamma\alpha, \\ a_{22} - \lambda &= \mu\gamma^2, & a_{01} &= \mu\alpha\beta, \end{aligned}$$

Gleichungen, in welche nur die vier Constanten λ, $\alpha\sqrt{\mu}$, $\beta\sqrt{\mu}$, $\gamma\sqrt{\mu}$ eingehen. Wir brauchen deshalb die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ nicht weiter zu berücksichtigen. Denn die Elimination dieser vier Constanten aus den sechs Gleichungen (6) giebt ebenfalls die beiden Bedingungsgleichungen. Um letztere

zu erhalten, multipliciren wir je zwei von den drei letzten Gleichungen (6) und dividiren sie durch die übrig bleibende. Dadurch wird:

$$(7) \ldots \quad \frac{a_{01}a_{02}}{a_{12}} = \mu\alpha^2, \quad \frac{a_{12}a_{10}}{a_{20}} = \mu\beta^2, \quad \frac{a_{20}a_{21}}{a_{01}} = \mu\gamma^2,$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die drei ersten Gleichungen (6) erhalten wir die oben angegebenen beiden Bedingungsgleichungen für die Rotationsoberfläche (1):

$$(8) \ldots \quad \lambda = a_{00} - \frac{a_{01}a_{02}}{a_{12}} = a_{11} - \frac{a_{12}a_{10}}{a_{20}} = a_{22} - \frac{a_{20}a_{21}}{a_{01}}$$

zugleich mit dem Werthe von λ.

Handelt es sich um die Richtung der Rotationsaxe, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus sind α, β, γ, so hat man auf Grund von (7):

$$(9) \ldots \quad \begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{02}}{a_{12}}} : \sqrt{\frac{a_{12}a_{10}}{a_{20}}} : \sqrt{\frac{a_{20}a_{21}}{a_{01}}}, \\ \alpha : \beta : \gamma &= \frac{1}{a_{12}} : \frac{1}{a_{20}} : \frac{1}{a_{01}}, \end{aligned}$$

in Uebereinstimmung mit (36) der neunzehnten Vorlesung.

Wir sehen hier zwei Bedingungsgleichungen für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung auftreten, während die eine Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$, von welcher die Hauptaxen der Oberfläche abhängen, für sich schon hinreicht, die Oberfläche zu einer Rotationsoberfläche zu machen. Die Erklärung dieses Paradoxons wird den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden.

Auf ein ähnliches Paradoxon stösst man schon beim Kreise in der Ebene. Man weiss nämlich, dass der Kegelschnitt:

$$a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + 2a_{02}x + 2a_{12}y + a_{22} = 0$$

nur unter den beiden Bedingungen:

$$a_{00} = a_{11}, \quad a_{01} = 0$$

ein Kreis ist, während schon die eine Bedingungsgleichung:

$$(a_{00} + a_{11})^2 - 4(a_{00}a_{11} - a_{01}^2) = 0$$

der Gleichheit der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01} \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

von welcher die Hauptaxen des Kegelschnittes abhängen, hinreicht, um den Kegelschnitt in einen Kreis übergehen zu lassen.

Man braucht aber nur jene Bedingungsgleichung in die Form der Summe zweier Quadrate zu bringen:

$$(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2 = 0,$$

um zu sehen, dass die eine Bedingungsgleichung in die beiden angegebenen Bedingungsgleichungen zerfällt.

Eine ähnliche Zerfällung der Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ in die Summe von Quadraten lässt sich nach der Analogie erwarten, und Kummer führte sie, wenn gleich auf einem beschwerlichen Wege, zuerst durch.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Aufstellung der Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$.

Die Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln einer gegebenen Gleichung erhält man bekanntlich dadurch, dass man die gegebene Gleichung nach der, in ihr vorkommenden Unbekannten partiell differentiirt und aus beiden Gleichungen die Unbekannte eliminirt. Ist die gegebene Gleichung eine algebraische vom $n$ten Grade, so wird die differentiirte Gleichung vom $(n - 1)$ten Grade. Die allgemeinen Methoden der Elimination der Unbekannten aus diesen Gleichungen geben jedesmal eine resultirende Gleichung, welche einen überflüssigen Factor enthält. Dieser überflüssige Factor wird vermieden, wenn man für die genannten Gleichungen zwei, ihnen äquivalente Gleichungen, beide vom $(n - 1)$ten Grade, in folgender Weise substituirt.

Man mache die gegebene Gleichung vom $n$ten Grade dadurch homogen, dass man in ihr für die Unbekannte λ setzt $\frac{\lambda}{\varkappa}$, und die Gleichung mit $\varkappa^n$ multiplicirt. Aus dieser Gleichung geht wieder die gegebene Gleichung hervor, wenn man

für $\varkappa$ den Werth setzt $\varkappa = 1$, welchen Werth von $\varkappa$ wir auch in dem Folgenden beibehalten werden. Wenn nun die gegebene, homogen gemachte Gleichung ist:

$$\psi(\varkappa,\ \lambda) = 0,$$

so hat man für die gleiche Wurzel λ überdies:

$$\psi'(\lambda) = 0.$$

Da aber:

$$n\psi(\varkappa,\ \lambda) = \varkappa\psi'(\varkappa) + \lambda\psi'(\lambda) = 0,$$

so sieht man, dass für die gleiche Wurzel auch ist:

$$\psi'(\varkappa) = 0.$$

Man hat daher für die gleiche Wurzel die beiden Gleichungen vom $(n-1)$ten Grade:

$$\psi'(\varkappa) = 0, \quad \psi'(\lambda) = 0,$$

aus welchen die Unbekannte λ zu eliminiren ist, während man früher die Elimination aus einer Gleichung des $n$ten und einer zweiten Gleichung des $(n-1)$ten Grades zu vollführen hatte, um die gesuchte Bedingungsgleichung zu erhalten.

Nach der Bezout-Sylvester'schen Methode kommt die Elimination der Unbekannten λ aus den beiden letzten Gleichungen darauf hinaus, die Elimination der $(2n-2)$ ersten Potenzen von λ, mit Einschluss der 0ten Potenz, aus folgenden $(2n-2)$ Gleichungen:

$$\psi'(\lambda) = 0, \quad \lambda\psi'(\lambda) = 0, \ldots \lambda^{n-2}\psi'(\lambda) = 0,$$
$$\psi'(\varkappa) = 0, \quad \lambda\psi'(\varkappa) = 0, \ldots \lambda^{n-2}\psi'(\varkappa) = 0,$$

wie aus linearen, homogenen Gleichungen zu vollführen.

Setzen wir nun, um die angegebene Regel auf den Fall der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ anzuwenden:

$$\psi(\varkappa,\ \lambda) = -\varDelta = \lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C,$$

so haben wir unter der Voraussetzung, dass $\varkappa$ den Werth 1 habe:

$$\psi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2A\lambda^1 + B\lambda^0,$$
$$-\psi'(\varkappa) = A\lambda^2 - 2B\lambda^1 + 3C\lambda^0,$$

und daher die Elimination der Potenzen λ^0, λ^1, λ^2, λ^3 aus den,

in Rücksicht auf sie linearen, homogenen Gleichungen auszuführen:

$$\begin{aligned}
3\lambda^3 - 2A\lambda^2 + B\lambda^1 \qquad\qquad &= 0, \\
+ 3\lambda^2 \;\; - 2A\lambda^1 + B\lambda^0 &= 0, \\
+ A\lambda^2 \;\; - 2B\lambda^1 + 3C\lambda^0 &= 0, \\
A\lambda^3 - 2B\lambda^2 + 3C\lambda^1 \qquad\qquad &= 0.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $3L^2$ die Determinante:

$$(10) \ldots \; 3L^2 = \begin{vmatrix} 3, & -2A, & +B, & 0 \\ 0, & 3, & -2A, & +B \\ 0, & +A, & -2B, & +3C \\ A, & -2B, & +3C, & 0 \end{vmatrix},$$

so haben wir als Resultat der Elimination die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \; L^2 = 0$$

für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$.

Um die aufgestellte Bedingungsgleichung (11) weiter zu transformiren, werden wir der Determinante (10) $3L^2$ nach und nach andere Formen geben.

Wir benutzen zu diesem Zwecke die Relationen zwischen den Potenzsummen s_0, $s_1, \ldots s_4$ der Wurzeln und den Coefficienten der kubischen Gleichung $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned}
s_0 \qquad\qquad\qquad &= 3, \\
s_1 - As_0 \qquad\qquad &= -2A, \\
s_2 - As_1 + Bs_0 \qquad &= B, \\
s_3 - As_2 + Bs_1 - Cs_0 &= 0, \\
s_4 - As_3 + Bs_2 - Cs_1 &= 0 \text{ *)},
\end{aligned}$$

---

*) Die angegebenen Formeln leitet man leicht aus der in λ identischen Gleichung:

$$-\Delta = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

in folgender Weise ab:

Die angegebene identische Gleichung, differentiirt nach λ:

$$-\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = (\lambda - \lambda)(\lambda - \lambda_2) + (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1),$$

aus welchen Gleichungen unmittelbar folgt:

$$\begin{aligned} s_1 &= A, \\ s_2 - As_1 &= -2B, \\ s_3 - As_2 + B &= 3C. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich die Determinante (10) $3L^2$ so ausdrücken:

$$3L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 - As_0, & s_2 - As_1 + Bs_0, & s_3 - As_2 + Bs_1 - Cs_0 \\ 0, & s_0, & s_1 - As_0, & s_2 - As_1 + Bs_0 \\ 0, & s_1, & s_2 - As_1, & s_3 - As_2 + Bs_1 \\ s_1, & s_2 - As_1, & s_3 - As_2 + Bs_1, & s_4 - As_3 + Bs_2 - Cs_1 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber wieder nach Satz (30) der siebenten Vorlesung gleich:

---

dividirt man durch die angegebene Gleichung, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} + \frac{1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda - \lambda_2}.$$

Jeden Bruch des rechten Theiles dieser Gleichung entwickelt man nach absteigenden Potenzen von λ, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\begin{cases} 1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 + \dots \\ 1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 + \dots \\ 1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2 + \dots \end{cases}$$

und durch Summation:

$$\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\left\{s_0 + \frac{s_1}{\lambda} + \frac{s_2}{\lambda^2} + \dots\right.$$

oder:

$$\lambda \frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} = \varDelta \left\{s_0 + \frac{s_1}{\lambda} + \frac{s_2}{\lambda^2} + \dots\right.$$

Setzt man in diese, in λ identische Gleichung für $\varDelta$ und $\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda}$ ihre Werthe:

$$\begin{aligned} \varDelta &= -\lambda^3 + A\lambda^2 - B\lambda + C, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} &= -3\lambda^2 + 2A\lambda - B, \end{aligned}$$

so erhält man durch Gleichsetzen der Coefficienten gleicher Potenzen von λ auf beiden Seiten der Gleichung die oben angegebenen Gleichungen und noch mehrere der Art.

$$3L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2 \\ 0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}.$$

Zieht man in der so dargestellten Determinante $3L^2$ die dritte Horizontalreihe der Componenten von der ersten Horizontalreihe ab, so erhält man nach dem angegebenen Satze:

$$3L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2 \\ 0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix},$$

und endlich nach dem Satze (14) der siebenten Vorlesung, wenn man zugleich für s_0 seinen Werth 3 setzt:

$$(12) \; \ldots\ldots \quad L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}.$$

Beachtet man aber, dass:

$$(13) \; \ldots\ldots \quad s_p = \lambda_0^p + \lambda_1^p + \lambda_2^p,$$

so hat man nach Satz (31) der siebenten Vorlesung:

$$(14) \ldots \quad L^2 = \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix}.$$

Da man ferner hat:

$$(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) = \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix},$$

so ist:

$$(15) \ldots \quad L^2 = \{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1)\}^2,$$

und $L^2 = 0$ ist eine für unseren Zweck geschicktere Form der Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$.

Diese von selbst einleuchtende Bedingungsgleichung hätten wir gleich als Ausgangspunkt unserer Untersuchung wählen können; es lag aber die Absicht vor, zu zeigen, wie die verschiedenen Formen sich auf einander zurückführen lassen.

Betrachten wir nun den Ausdruck von L^2 in (15), so sehen wir, dass derselbe verallgemeinert in (49) der zwanzigsten Vorlesung als die Summe von gleichartigen Producten dargestellt worden ist.

Setzen wir dort $n = 2$, so erhalten wir:

$$L^2 = \Sigma\, C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}\, a_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}\, e_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2},$$

und da in dem vorliegenden Falle die Function f ist:

$$f = x^2 + y^2 + z^2, \text{ so ist auch } a_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} = e_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}.$$

Es stellt sich hiernach der Ausdruck L^2 als die Summe von Quadraten dar, welche rational zusammengesetzt sind aus den Coefficienten der gegebenen Function φ.

Da nun dieser Ausdruck L^2 nicht verschwinden kann, wenn nicht jedes einzelne Quadrat, woraus er besteht, verschwindet, so sieht man, dass die eine Bedingungsgleichung (11), $L^2 = 0$, für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ in mehrere zerfällt, wodurch das oben hervorgehobene Paradoxon erklärt ist.

Wenn hiernach die Zerlegung des Ausdruckes L^2 in die Summe von Quadraten theoretisch keine Schwierigkeiten macht, so bedarf es doch mannigfacher Reductionen, um die Quadrate auf die einfachsten, von Kummer angegebenen Formen zurückzuführen. Crelles Journal für Mathematik Bd. 26, p. 268. Wir werden daher den in der zwanzigsten Vorlesung eingeschlagenen Weg der Zerlegung des Quadrates L^2 in dem Folgenden dem Zwecke entsprechend anpassen.

Die Determinante:

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad L = \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix}$$

bleibt ungeändert, wenn man irgend eine der Verticalreihen der Componenten durch eine und dieselbe Grösse dividirt und die Determinante selbst mit derselben Grösse multiplicirt.

Darauf hin kann die angegebene Determinante auch so dargestellt werden:

$$L = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2 \\ \frac{1}{\lambda_0}, & \frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}.$$

Bemerken wir, dass das Product $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2$ der drei Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ nach (10) der neunzehnten Vorlesung gleich ist:

$$(17) \ldots\ldots \quad D = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix},$$

so haben wir:

$$(18) \ldots\ldots\ldots \quad L = D \begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2 \\ \frac{1}{\lambda_0}, & \frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}.$$

Das Quadrat dieses Ausdruckes ist eine symmetrische Function der Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$. Dasselbe lässt sich also rational durch die Coefficienten in der Gleichung ausdrücken. Die genannten Coefficienten sind aber wieder rationale Ausdrücke der Coefficienten in der gegebenen Function φ. Es ist also L^2 ein rationaler Ausdruck der Coefficienten in der Function φ. Diesen Ausdruck in die Summe von Quadraten zu zerlegen, wird unsere Aufgabe sein.

Zu diesem Zwecke bringen wir in Erinnerung, dass in der neunzehnten Vorlesung die Substitutionen mit ihren Auflösungen:

$$(19) \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, & X &= ax + by + cz, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, & Y &= a'x + b'y + c'z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, & Z &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

der Art bestimmt worden sind, dass sie folgende drei Gleichungen zu identischen Gleichungen machen:

$$(20) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2, \\ \Phi(x, y, z) &= \frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2, \end{aligned}$$

wenn $\Phi(x, y, z)$ die reciproke Function von $\varphi(x, y, z)$ ist. Denn die mittlere Gleichung folgt unmittelbar aus dem Satze (25) der zwanzigsten Vorlesung.

Dieses vorausgeschickt, bilden wir nun die Determinante $[a]$:

$$(21) \quad \ldots \quad [a] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\varphi'(x), & \frac{1}{2}\varphi'(y), & \frac{1}{2}\varphi'(z) \\ \frac{D}{2}\Phi'(x), & \frac{D}{2}\Phi'(y), & \frac{D}{2}\Phi'(z) \\ x, & y, & z \end{vmatrix}$$

und bemerken, dass die Componenten in derselben auf Grund der identischen Gleichungen (20) folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\varphi'(x) &= a\lambda_0 X + a'\lambda_1 Y + a''\lambda_2 Z, \\ \tfrac{1}{2}\varphi'(y) &= b\lambda_0 X + b'\lambda_1 Y + b''\lambda_2 Z, \\ \tfrac{1}{2}\varphi'(z) &= c\lambda_0 X + c'\lambda_1 Y + c''\lambda_2 Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2}\Phi'(x) &= a\frac{D}{\lambda_0}X + a'\frac{D}{\lambda_1}Y + a''\frac{D}{\lambda_2}Z, \\ \frac{D}{2}\Phi'(y) &= b\frac{D}{\lambda_0}X + b'\frac{D}{\lambda_1}Y + b''\frac{D}{\lambda_2}Z, \\ \frac{D}{2}\Phi'(z) &= c\frac{D}{\lambda_0}X + c'\frac{D}{\lambda_1}Y + c''\frac{D}{\lambda_2}Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe der Componenten in die Determinante (21), so sehen wir, dass nach (31) und (29) der siebenten Vorlesung dieselbe in das Product zerfällt:

$$(22) \quad [a] = \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2 \\ \frac{1}{\lambda_0}, & \frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} . D . XYZ.$$

Da nun der erste Factor dieses Productes nach (19) und (20) der achtzehnten Vorlesung gleich 1 ist, das Product der beiden, darauf folgenden Factoren nach (18) gleich L, so haben wir die, durch die Substitutionen (19) identische Gleichung:

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad XYZ = \frac{[a]}{L}.$$

Wir entwickeln nun die durch (21) definirte Determinante $[a]$, welche homogen und von der dritten Ordnung ist in Rücksicht auf die Variabeln x, y, z, indem wir setzen:

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [a] = \Sigma\, a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

und setzen diese Entwickelung in (23).

Alsdann haben wir eine Entwickelung des Productes XYZ in (23) nach Potenzen und Producten der Variabeln x, y, z, in welcher die Coefficienten rationale Functionen sind der Coefficienten in der Function φ, sämmtlich dividirt durch L.

Eine zweite Entwickelung desselben Productes:

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad XYZ = \Sigma\, A_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

in welcher die Entwickelungscoefficienten ganze, rationale Functionen der Substitutionscoefficienten sind, entnehmen wir aus (45) der achtzehnten Vorlesung, woselbst auch in (46) die Werthe der Entwickelungscoefficienten vorliegen.

Da nun beide Entwickelungen für alle Werthe der Variabeln x, y, z gelten, so müssen die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln in beiden Entwickelungen einander gleich sein, weshalb wir haben:

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{a_{\alpha\beta\gamma}}{L}.$$

Diese eleganten Relationen sind von Jacobi aufgestellt worden in Crelle's Journal für Mathematik Bd. 30. p. 46.

Setzen wir endlich diese Werthe von $A_{\alpha\beta\gamma}$ in die Gleichung (49) der achtzehnten Vorlesung ein, so erhalten wir die Kummer'sche Zerlegung des Ausdruckes L^2 in die Summe von sieben Quadraten:

$$L^2 = 15 \{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 \tag{27}$$
$$+ (a_{120} - a_{102})^2 + (a_{012} - a_{210})^2 + (a_{201} - a_{021})^2.$$

Eine andere Zerlegung desselben Ausdruckes in die Summe von zehn Quadraten würde aus der Gleichung (47) der genannten Vorlesung hervorgehen.

Im Original findet man Kummer's glänzende Entdeckung in Crelle's Journal für Mathematik Bd. 26. p. 268.

Es bleibt noch übrig die zehn Entwickelungscoefficienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ selbst zu berechnen. Dazu ist die Kenntniss des Productes von D und der reciproken Funktion $\Phi(x, y, z)$ erforderlich. Setzen wir daher:

$$D\Phi(x,y,z) = b_{00}x^2 + b_{11}y^2 + b_{22}z^2 + 2b_{12}yz + 2b_{20}zx + 2b_{01}xy, \tag{28}$$

so ergeben sich nach dem bekannten Bildungsgesetz der reciproken Function $\Phi(x, y, z)$ aus der gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$ die Werthe:

$$\begin{aligned} b_{00} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & b_{12} &= a_{01}a_{02} - a_{00}a_{12}, \\ b_{11} &= a_{22}a_{00} - a_{20}^2, & b_{20} &= a_{12}a_{10} - a_{11}a_{20}, \\ b_{22} &= a_{00}a_{11} - a_{01}^2, & b_{01} &= a_{20}a_{21} - a_{22}a_{01}. \end{aligned} \tag{29}$$

Setzen wir ferner die Werthe der partiellen Differentialquotienten der gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$ und ihrer reciproken Functionen $\Phi(x, y, z)$ in (21), und entwickeln nach Vorschrift von (24), so finden wir:

$$\begin{aligned} a_{300} &= a_{20}b_{10} - a_{10}b_{20}, \\ a_{030} &= a_{01}b_{21} - a_{21}b_{01}, \\ a_{003} &= a_{12}b_{02} - a_{02}b_{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{120} &= a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21} + a_{00}b_{21} - a_{21}b_{00} + a_{01}b_{20} - a_{20}b_{01}, \\ a_{102} &= a_{12}b_{00} - a_{00}b_{12} + a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22} + a_{10}b_{02} - a_{02}b_{10}, \\ a_{012} &= a_{02}b_{22} - a_{22}b_{02} + a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} + a_{12}b_{01} - a_{01}b_{12}, \\ a_{210} &= a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20} + a_{00}b_{20} - a_{20}b_{00} + a_{21}b_{10} - a_{10}b_{21}, \\ a_{201} &= a_{10}b_{00} - a_{00}b_{10} + a_{22}b_{10} - a_{10}b_{22} + a_{20}b_{12} - a_{12}b_{20}, \\ a_{021} &= a_{01}b_{22} - a_{22}b_{01} + a_{11}b_{01} - a_{01}b_{11} + a_{02}b_{21} - a_{21}b_{02}, \\ a_{111} &= a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22} + a_{00}b_{22} - a_{22}b_{00} - a_{11}b_{00} - a_{00}b_{11}. \end{aligned} \tag{30}$$

Der Ausdruck (27) für L^2 kann, unter der Voraussetzung der Realität der Coefficienten in der gegebenen Function (2) $\varphi(x, y, z)$, nicht verschwinden, wenn nicht ein jedes der Quadrate verschwindet, aus welchen er zusammengesetzt ist. Lassen wir daher nur die beiden ersten Quadrate der Summe verschwinden, so ergeben sich daraus die beiden Gleichungen:

$$\frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{b_{20}}{a_{20}} = \frac{b_{01}}{a_{01}},$$

welche mit den zu Anfang der Vorlesung aufgestellten Bedingungsgleichungen vollkommen übereinstimmen.

Unter Vermittelung dieser beiden Gleichungen verschwinden auch die übrigen Entwickelungscoefficienten $a_{\alpha\beta\gamma}$, und deshalb auch die übrigen Quadrate, aus welchen der Ausdruck (27), L^2, zusammengesetzt ist.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Schnitte von Oberflächen zweiter Ordnung und Ebenen. Kreisschnitte.

Die Schnittcurve einer Ebene und einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung ist ein Kegelschnitt, weil nach den Auseinandersetzungen in der sechszehnten Vorlesung durch die Schnittcurve eines Ebenenpaares und der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sich immer ein Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen lässt. Sie ist überdies eine Curve zweiter Ordnung. Denn transformirt man die Gleichung der gegebenen Oberfläche auf ein neues, rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen eine Coordinatenebene mit der, die Oberfläche schneidenden, Ebene zusammenfällt, so ändert sich der Grad der Gleichung nicht. Es ändert sich auch der Grad der Gleichung nicht, wenn man die, auf der schneidenden Ebene senkrecht stehende, variable Coordinate in der Gleichung der Oberfläche

gleich 0 setzt, wodurch man eben die Gleichung zweiter Ordnung der Schnittcurve erhält.

Die reciproke Polare derjenigen geraden Linie, welche auf der Schnittebene im Unendlichen liegt, schneidet die Schnittebene in dem Mittelpunkte der Schnittcurve. Denn alle Sehnen der Oberfläche, welche durch den Schnittpunkt und die genannte gerade Linie im Unendlichen gehen, werden durch ihn halbirt. Es macht demnach keine Schwierigkeit den Mittelpunkt eines ebenen Schnittes einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung zu construiren, oder, der Construction folgend, die Coordinaten desselben analytisch zu bestimmen. Wir ziehen es jedoch vor, das Problem des Mittelpunktes eines ebenen Schnittes auf einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung rein algebraisch aufzufassen.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $\varphi(x, y, z)$ und $f(x, y, z, 1)$ die Ausdrücke:

$$(1)\quad \varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy,$$

$$(2)\quad f(x, y, z, 1) = \varphi(x, y, z) + 2a_{30}x + 2a_{31}y + 2a_{32}z + a_{33},$$

und nehmen an, dass die Gleichungen der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung und der sie schneidenden Ebene seien:

$$(3)\quad \dots\dots\dots \quad f(x, y, z, 1) = 0,$$

$$(4)\quad \dots\dots\dots \quad ax + by + cz + d = 0.$$

Das Problem des Mittelpunktes der Schnittcurve der Oberfläche, und der Ebene lässt sich dann algebraisch so fassen:

Die Substitutionen:

$$(5)\quad \dots \quad x = X + A, \quad y = Y + B, \quad z = Z + C$$

zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$(6)\quad f(x, y, z, 1) = \varphi(X, Y, Z) - 2\mu(aX + bY + cZ) + f(A, B, C, 1),$$

$$(7)\quad \dots \quad ax + by + cz + d = aX + bY + cZ$$

zu identischen Gleichungen machen.

Das Problem verlangt die Bestimmung von vier Grössen μ, A, B, C. Diese vier Grössen sind so zu bestimmen, dass sie den vierzehn Bedingungsgleichungen genügen, welche man erhält, wenn man (5) in die Gleichungen (6) und (7) substituirt und die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen einander gleich setzt. Man bemerkt aber sogleich, dass die sieben, von den Gliedern der zweiten und oten Ordnung in (6) herrührenden, Bedingungsgleichungen identische Gleichungen sind, dass ebenso die drei, von den Gliedern der ersten Ordnung in (7) herrührenden, Bedingungsgleichungen identische Gleichungen sind. Es bleiben also in der That nur vier Gleichungen zur Bestimmung der genannten vier Grössen übrig, und das Problem ist ein ganz bestimmtes.

Die in dem Problem zu bestimmenden Grössen A, B, C sind die Coordinaten des Mittelpunktes des durch die Gleichungen (3) und (4) gegebenen Kegelschnittes. Denn macht man in den genannten Gleichungen die Substitutionen (5), wodurch mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen nur der Coordinatenanfangspunkt geändert wird, so gehen die Gleichungen (3) und (4) des Kegelschnittes über in:

$$(8) \quad \varphi(X, Y, Z) - 2\mu(aX + bY + cZ) + f(A, B, C, 1) = 0,$$

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad aX + bY + cZ = 0.$$

Sind nun X, Y, Z die Coordinaten irgend eines Punktes auf diesem Kegelschnitte, welche den beiden Gleichungen genügen müssen, so genügen auch die Coordinaten $-X, -Y, -Z$ denselben beiden Gleichungen. Das heisst, jede durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Sehne des Kegelschnittes wird durch ihn halbirt. Da aber A, B, C die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in dem ursprünglichen Coordinatensysteme sind, so sind dieselben zugleich die Coordinaten des Mittelpunktes des durch die Gleichungen (3) und (4) gegebenen Kegelschnittes in dem ursprünglichen Coordinatensysteme.

Macht man in (6) und (7) die Substitutionen (5), und setzt die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der genannten Gleichungen ein-

ander gleich, so erhält man mit Uebergehung der zehn identischen Gleichungen folgende vier lineare Gleichungen zur Bestimmung von μ und der Coordinaten A, B, C des Mittelpunktes des Kegelschnittes:

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'(A) + \mu a &= 0, \\ \tfrac{1}{2}f'(B) + \mu b &= 0, \\ \tfrac{1}{2}f'(C) + \mu c &= 0, \\ aA + bB + cC + d &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen, dass man das vorgelegte Problem auch als eine Maximums- oder Minimums-Aufgabe behandeln kann:

Die Werthe der Variabeln in der gegebenen Function $f(x, y, z, 1)$ so zu bestimmen, dass die Function ein Maximum oder Minimum werde, wenn zwischen den Variabeln die Bedingungsgleichung $ax + by + cz + d = 0$ gegeben ist.

Denn diese Aufgabe führt wieder auf die Gleichungen (10) zurück.

Es fällt ferner in die Augen, dass in die, den Mittelpunkt des Kegelschnittes bestimmenden, Gleichungen das ganz constante Glied a_{33} in der Gleichung der gegebenen Oberfläche nicht eingeht. Diese Bemerkung beweiset den Satz:

Eine beliebig gegebene Ebene schneidet das ganze System Oberflächen zweiter Ordnung, die denselben Asymptotenkegel haben, in Kegelschnitten, welche denselben Mittelpunkt haben.

Dieser Satz gilt auch von den Ellipsoiden mit demselben Mittelpunkte und derselben Richtung ihrer Hauptaxen, wenn die Verhältnisse der letzteren constant sind. Denn unter diesen Bedingungen haben sie denselben imaginären Asymptotenkegel.

Betrachtet man in der vierten Gleichung (10) d als variabel, und eliminirt man aus den übrigen Gleichungen (10) die Unbekannte μ, so erhält man die Gleichungen:

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{f'(A)}{a} = \frac{f'(B)}{b} = \frac{f'(C)}{c}$$

der geraden Linie, in welcher die Mittelpunkte der mit (4) parallelen Schnitte liegen. Es ist dieses die reciproke Polare derjenigen geraden Linie, welche in der Ebene des Schnittes im Unendlichen liegt. Deshalb ist sie auch der geometrische Ort der Pole der parallelen Schnittebenen.

Die Lage der, die gegebene Oberfläche schneidenden, Ebene war bisher beliebig. Wir wollen jetzt dieselbe so bestimmen, dass der Mittelpunkt auf der Schnittcurve selbst liegt, dass also die Schnittcurve ein Linienpaar wird.

Die Bedingung, dass dieses zutreffe, drückt neben den Gleichungen (10) die noch hinzukommende Gleichung aus:

$$f(A,\ B,\ C,\ 1) = 0.$$

Um diese Gleichung des zweiten Grades mit Hülfe der Gleichungen (10) auf eine lineare Gleichung zurückzuführen, multipliciren wir die Gleichungen (10) der Reihe nach mit A, B, C, $-\mu$ und addiren, wodurch wir erhalten:

$$\tfrac{1}{2}\{Af'(A) + Bf'(B) + Cf'(C)\} - \mu d = 0.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der zuletzt angegebenen Bedingungsgleichung ab, so können wir dieselbe so darstellen:

$$(12) \ldots \quad a_{30}A + a_{31}B + a_{32}C + a_{33} + \mu d = 0.$$

Reihen wir endlich diese Bedingungsgleichung als die vorletzte in dem Systeme Gleichungen (10) ein, und setzen, um sämmtliche Gleichungen homogen zu machen, $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ respective für A, B, C und $\mu D = v$, so haben wir folgendes System von fünf homogenen Gleichungen:

$$(13) \ldots \quad \begin{aligned} a_{00}A + a_{01}B + a_{02}C + a_{03}D + av &= 0, \\ a_{10}A + a_{11}B + a_{12}C + a_{13}D + bv &= 0, \\ a_{20}A + a_{21}B + a_{22}C + a_{23}D + cv &= 0, \\ a_{30}A + a_{31}B + a_{32}C + a_{33}D + dv &= 0, \\ aA + bB + cC + dD \qquad &= 0, \end{aligned}$$

welchem genügt werden muss, wenn die Schnittcurve der Oberfläche ein Linienpaar sein soll.

Die Elimination der fünf Unbekannten A, B, C, D, v aus diesen Gleichungen giebt:

$$(14) \ldots \quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & a \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & c \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & d \\ a, & b, & c, & d, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die gesuchte Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der Gleichung (4) der, die gegebene Oberfläche (3) in geraden Linien schneidenden, Ebenen. Diese Bedingungsgleichung drückt nach (18) und (13) der zehnten Vorlesung den Satz aus:

Die Ebenen, welche eine Oberfläche zweiter Ordnung in geraden Linien schneiden, sind Tangentenebenen der Oberfläche, und jede Tangentenebene einer Oberfläche zweiter Ordnung schneidet die Oberfläche in geraden Linien.

Von den fünf Gleichungen (13) drückt die vierte die Bedingung aus, dass der, durch die vier anderen bestimmte, Mittelpunkt der Schnittcurve auf dieser Curve selbst liege. Wir werden die genannte Bedingung wieder aufheben, indem wir von der vierten Gleichung absehen und an ihre Stelle die Bedingung $D = 0$ substituiren, dass der Mittelpunkt der ebenen Schnittcurve in das Unendliche falle, dass also die Schnittcurve eine Parabel werde. Dadurch erhalten wir aus (13) mit Weglassung der vierten Gleichung:

$$(15) \ldots \quad \begin{aligned} a_{00}A + a_{01}B + a_{02}C + av &= 0, \\ a_{10}A + a_{11}B + a_{12}C + bv &= 0, \\ a_{20}A + a_{21}B + a_{22}C + cv &= 0, \\ aA + bB + cC \quad\quad &= 0, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von A, B, C, v hervorgeht:

$$(16) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten a, b, c, d der, die gegebene Oberfläche (3) schneidenden, Ebene (4) zu erfüllen haben, wenn die Schnittcurve eine Parabel sein soll.

Die Bemerkung, dass in diese Bedingungsgleichung die letzte Coordinate d der Ebene gar nicht eingeht, drückt geometrisch den Satz aus:

Parallele Ebenen schneiden eine Oberfläche zweiter Ordnung in Parabeln, wenn eine derselben die Oberfläche in einer Parabel schneidet.

Setzen wir nun $d = 0$, um nur die Schnittebenen zu betrachten, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen, so drückt die Gleichung (16) analytisch einen Kegel zweiter Ordnung aus, der von der Schnittebene berührt wird.

Um die Bedeutung dieses Kegels für die gegebene Oberfläche zu ermitteln, drücken wir den, dem Asymptotenkegel der Oberfläche parallelen, Kegel, dessen Spitze in dem Coordinatenanfangspunkte liegt, in Punktcoordinaten durch die Gleichung aus:

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Die reciproke Function $\Phi(a, b, c)$ von $\varphi(x, y, z)$ kann man darstellen wie folgt:

$$\Phi(a, b, c) = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}.$$

Es ist also:

$$\Phi(a, b, c) = 0$$

die Gleichung desselben Kegels in Ebenencoordinaten a, b, c, $d = 0$.

Da diese Gleichung aber übereinstimmt mit der Gleichung (16), so haben wir den Satz:

Alle Ebenen, welche parallel sind den Tangentenebenen des Asymptotenkegels einer Oberfläche

zweiter Ordnung, schneiden die Oberfläche in Parabeln.

Ausser den angegebenen Parabelschnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung giebt es keine.

Wir werden in dem Folgenden das Problem der Hauptaxen eines Kegelschnittes auf einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung als die Frage nach den, von dem Coordinatenanfangspunkte ausgehenden, geraden Linien behandeln, welche den Hauptaxen des Kegelschnittes parallel sind, um nicht die Parabel von unserer Behandlungsweise ausschliessen zu müssen. Wir werden das vorgelegte Problem rein algebraisch auffassen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass (3) die Gleichung der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung, und dass (4) die Gleichung der, die Oberfläche schneidenden, Ebene sei. Wir nehmen ferner an, dass die Gleichung (4) der Ebene in der Normalform gegeben sei, wonach a, b, c die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die Normale der Ebene mit den zum Grunde gelegten Coordinatenaxen bildet, zwischen welchen Cosinus die Relation besteht:

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dieses vorausgesetzt, kommt das vorgelegte Problem der Hauptaxen des Kegelschnittes auf der gegebenen Oberfläche darauf hinaus:

Die Substitutionen zu bestimmen:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, \end{aligned}$$

welche die Gleichungen:

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$(20) \quad \varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 - 2\mu' XY - 2\mu'' XZ$$

zu identischen Gleichungen machen unter der Voraussetzung, dass a, b, c gegebene Grössen seien, zwischen welchen die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ besteht.

Die Substitutionen (18) sind nämlich, weil sie die Gleichung (19) zu einer identischen machen, die Transformationsformeln für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte. Die YZ-Ebene des neuen Coordinatensystemes ist parallel der, die Oberfläche schneidenden, Ebene, weil man durch Auflösung der Substitutionen (18) den Werth von X erhält: $X = ax + by + cz$. Deshalb stellt sich die Gleichung der Ebene (4) in dem neuen Coordinatensysteme so dar:

$$X + d = 0.$$

Die Gleichung (20) dient zur Transformation der Gleichung (3) der gegebenen Oberfläche auf das neue Coordinatensystem und lässt erkennen, dass in der transformirten Gleichung (3) das mit YZ multiplicirte Glied ganz fehlt. Setzt man daher in der transformirten Gleichung (3) $-d$ für X, um die Gleichung des Schnittes der Oberfläche in der senkrechten Projection auf die YZ-Ebene zu erhalten, so fehlt auch in dieser Gleichung das mit YZ multiplicirte Glied, welches eben der Beweis ist, dass die Y-Axe und die Z-Axe des neuen Coordinatensystemes den Hauptaxen der Schnittcurve parallel gehen.

Das vorgelegte Problem verlangt die Bestimmung von elf Grössen, nämlich der sechs, nicht gegebenen Coefficienten in den Substitutionen (18) und der fünf Coefficienten λ_0, λ_1, λ_2 μ', μ'' in der Gleichung (20). Die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen ist zwölf. Man erhält dieselben, wenn man in (19) und (20) die Substitutionen (18) macht und die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen einander gleich setzt. Da von diesen zwölf Bedingungsgleichungen jedoch eine, nämlich die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, der Voraussetzung nach schon erfüllt ist, so hat man gerade so viele Bedingungsgleichungen als Unbekannte.

Nachdem wir uns auf diese Weise von der Lösbarkeit des Problemes überzeugt haben, gehen wir an die Bestimmung der genannten elf Unbekannten.

Wir setzen zu diesem Zwecke $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, und erhalten aus (20) mit Rücksicht auf (18) den Werth der ersten Unbekannten:

$$(21) \quad \lambda_0 = \varphi(a, b, c).$$

Um die übrigen zehn Unbekannten zu bestimmen, werden wir die Gleichungen benutzen:

$$(22) \quad \begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

welche aus der Gleichung (19) durch Differentiation nach den Variabeln X, Y, Z hervorgehen, und überdies noch die sechs Gleichungen, welche die identische Gleichung (19) bedingen:

$$(23) \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a''a + b''b + c''c &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0. \end{aligned}$$

Durch Differentiation der durch die Substitutionen (18) identischen Gleichung (20) nach der Variabeln Y erhalten wir:

$$a'\varphi'(x) + b'\varphi'(y) + c'\varphi'(z) = 2\lambda_1 Y - 2\mu' X,$$

oder:

$$x\varphi'(a') + y\varphi'(b') + z\varphi'(c') = 2\lambda_1 Y - 2\mu' X.$$

Setzen wir in dieser Gleichung für Y und X die Werthe aus (22), und vergleichen hierauf beide Seiten der Gleichung mit einander, so ergiebt sich daraus das System Gleichungen:

$$(24) \quad \begin{aligned} \varphi'(a') &= 2\lambda_1 a' - 2a\mu', \\ \varphi'(b') &= 2\lambda_1 b' - 2b\mu', \\ \varphi'(c') &= 2\lambda_1 c' - 2c\mu'. \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir ein zweites System Gleichungen durch Differentiation der Gleichung (20) nach Z:

$$(25) \ldots\ldots\ \begin{aligned} \varphi'(a'') &= 2\lambda_2 a'' - 2a\mu'', \\ \varphi'(b'') &= 2\lambda_2 b'' - 2b\mu'', \\ \varphi'(c'') &= 2\lambda_2 c'' - 2c\mu''. \end{aligned}$$

Wir schliessen ferner dem Systeme Gleichungen (24) die letzte Gleichung (23) und dem Systeme Gleichungen (25) die vorletzte Gleichung (23) an, wodurch wir zwei ganz analog gebildete Systeme Gleichungen erhalten, von welchen wir nur das eine System weiter zu behandeln brauchen.

Das erste von diesen Systemen Gleichungen lässt sich so darstellen:

$$(26) \ldots\ \begin{aligned} (a_{00} - \lambda_1)a' + a_{01}b' + a_{02}c' + a\mu' &= 0, \\ a_{10}a' + (a_{11} - \lambda_1)b' + a_{12}c' + b\mu' &= 0, \\ a_{20}a' + a_{21}b' + (a_{22} - \lambda_1)c' + c\mu' &= 0, \\ aa' + bb' + cc' \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

Es ist linear und homogen in Rücksicht auf die vier Unbekannten a', b', c', μ'. Eliminirt man diese vier Unbekannten, und setzt λ für λ_1, so erhält man die Gleichung:

$$(27) \ldots\ldots\ \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01}, & a_{02}, & a \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda, & a_{12}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} - \lambda, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist quadratisch in λ. Ihre Wurzeln sind die gesuchten Unbekannten λ_1 und λ_2.

Wenn man diese Gleichung nach Potenzen und Producten der gegebenen Grössen a, b, c entwickelt, so wird man bemerken, dass die Coefficienten derselben, negativ genommen, gerade die 6 in der neunzehnten Vorlesung unter (12) aufgeführten Ausdrücke sind. Adoptirt man daher die dort gebrauchte Bezeichnung, so stellt sich die Gleichung (27) so dar:

$$(28)\ \Delta_{00}a^2 + \Delta_{11}b^2 + \Delta_{22}c^2 + 2\Delta_{12}bc + 2\Delta_{20}ca + 2\Delta_{01}ab = 0.$$

Von dieser quadratischen Gleichung (27) oder (28) hängen die Hauptaxen des ebenen Schnittes der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung ab. Durch die Wurzeln derselben, die man

festzustellen hat, lassen sich die noch übrigen Unbekannten des Problemes wie folgt ausdrücken.

Setzt man, um von den Bezeichnungen (12) der neunzehnten Vorlesung weiteren Gebrauch zu machen, in den drei ersten Gleichungen (26) λ für λ_1, indem man unter λ die Wurzel λ_1 versteht, und löset die genannten drei Gleichungen nach a', b', c' auf, so erhält man folgende Werthe derselben, ausgedrückt durch die einzige Unbekannte μ':

$$(29) \quad \begin{aligned} a' &= -\frac{\mu'}{\Delta}(\Delta_{00}a + \Delta_{10}b + \Delta_{20}c), \\ b' &= -\frac{\mu'}{\Delta}(\Delta_{01}a + \Delta_{11}b + \Delta_{21}c), \\ c' &= -\frac{\mu'}{\Delta}(\Delta_{02}a + \Delta_{12}b + \Delta_{22}c). \end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichungen für λ die andere Wurzel λ_2, so hat man a', b', c', μ' respective zu verändern in a'', b'', c'', μ''.

Es bleibt noch übrig die Werthe von μ' und μ'' festzustellen. Dazu dienen die Gleichungen:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.$$

Denn, setzt man in die erste von diesen Gleichungen die Werthe (29) ein, und in die zweite die, aus ihnen durch Veränderung der ersten Wurzel λ_1 in die zweite λ_2 hervorgegangenen Werthe, so bestimmt die erste Gleichung den Werth von μ', die andere den Werth von μ''.

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung, von welcher die Hauptaxen eines ebenen Schnittes einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung abhängen, sind reell.

Denn, wären sie imaginär, so könnten sie nur die Form haben $\lambda_1 = p + qi$ und $\lambda_2 = p - qi$. Von derselben Form würden aber auch die in dem Vorhergehenden festgestellten Werthe der Substitutionscoefficienten a' und a'', ebenso b' und b'', wie c' und c'' sein. In dieser Form könnten sie jedoch nicht der vierten Gleichung (23) genügen:

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0.$$

Es ist wichtig zu wissen, dass durch reelle Coordinatentransformation die Gleichung der senkrechten Projection der Schnittcurve auf die *YZ*-Ebene sich auf die oben angedeutete Form zurückführen lässt, in welcher die Summe der Glieder zweiter Ordnung ist:

(30) . . . . $\lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2.$

Von ihnen hängt nämlich die Natur der Curve ab. Sie ist eine Ellipse, wenn die Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung (27) gleiche Vorzeichen haben. Sie ist eine Hyperbel, wenn die Wurzeln von entgegengesetzten Vorzeichen sind. Sie ist endlich eine Parabel, wenn eine der beiden Wurzeln verschwindet.

Die quadratische Gleichung (27) dient daher zur Unterscheidung der drei Arten von ebenen Schnittcurven der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung. Die Schnittcurve ist eine Ellipse, wenn die nach Potenzen von λ geordnete Gleichung (27) aus Gliedern besteht von gleichen Vorzeichen, oder aus Gliedern von abwechselnden Vorzeichen. Im entgegengesetzten Falle ist die Schnittcurve eine Hyperbel. Die Bedingung für Parabelschnitte erhalten wir, da für sie eine Wurzel der quadratischen Gleichung (27) verschwindet, wenn wir in jener Gleichung λ gleich 0 setzen, wodurch wir wieder auf die Bedingungsgleichung (16) zurückkommen.

Die quadratische Gleichung (27) ist unabhängig von der Entfernung $-d$ der, die gegebene Oberfläche schneidenden, Ebene vom Coordinatenanfangspunkte. Es bleiben daher für alle parallelen Schnittebenen die beiden Glieder der zweiten Ordnung (30) ungeändert. Auch die Substitutionscoefficienten sind unabhängig von der genannten Entfernung $-d$, wie aus ihren Werthen (29) zu ersehen ist. Diese Bemerkungen, geometrisch gefasst, geben den Satz:

Parallele Ebenen schneiden eine Oberfläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten.

Wir verstehen nämlich unter ähnlichen Kegelschnitten solche, deren Hauptaxen dasselbe Verhältniss haben, und

unter ähnlich liegenden Kegelschnitten solche, deren Hauptaxen parallele Richtungen haben.

Die Grenze zwischen den Ellipsenschnitten und Hyperbelschnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung bilden die Parabelschnitte, welche den Tangentenebenen des Asymptotenkegels der Oberfläche parallel sind. Kann diese Grenze nicht erreicht werden, das ist, wenn der Asymptotenkegel imaginär ist, so hat die Oberfläche nur Schnitte derselben Art. Da der Asymptotenkegel des Ellipsoides imaginär ist, so wird das Ellipsoid von allen Ebenen nur in Ellipsen geschnitten.

Das durchgeführte, algebraische Problem lässt sich auch als eine Maximums- oder Minimums-Aufgabe ausdrücken wie folgt:

Die Werthe der Variabeln in der gegebenen, homogenen Function zweiter Ordnung $\varphi(x, y, z)$ so zu bestimmen, dass der Werth dieser Function ein Maximum oder Minimum werde, wenn die Variabeln den beiden Bedingungsgleichungen $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $ax + by + cz = 0$ genügen.

Denn, stellt man nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung die Gleichungen auf, welche das Problem lösen, so findet man gerade die Gleichungen (26) und die Gleichung $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$, wenn man mit a', b', c' die Werthe der Variabeln bezeichnet, welche die gegebene Function zu einem Maximum oder Minimum machen.

Die Schnittcurve der gegebenen Ebene (4) und der gegebenen Oberfläche (3) wird ein Kreis, wenn die Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung (27) einander gleich sind.

Darin liegt ein Widerspruch. Denn man weiss, dass zwei Bedingungen zu erfüllen sind, wenn ein Kegelschnitt ein Kreis werden soll. Der Nachweis, dass die Bedingungsgleichung der Gleichheit der Wurzeln sich als die verschwindende Summe von Quadraten darstellt, wird den Widerspruch aufklären.

Es wird also darauf ankommen, den Ausdruck $(\lambda_2 - \lambda_1)^2$, als symmetrische Function der Wurzeln der quadratischen Gleichung (27), rational durch die Coefficienten in der Gleichung auszudrücken, diese Coefficienten wieder durch die Coefficienten in der gegebenen Function φ und durch die gegebenen Coefficienten a, b, c zu ersetzen, und den, auf diese Weise gebildeten Ausdruck für $(\lambda_2 - \lambda_1)^2$ in die Summe von Quadraten zu zerlegen.

Auf directem Wege dieses auszuführen, scheint unmöglich. Mit Hülfe der, in dem vorhergehenden Abschnitte aufgeführten Gleichungen werden wir es aber unternehmen.

Zu diesem Zwecke wiederholen wir folgende, durch die Substitutionen (18) identische Gleichungen:

$$(31) \quad ax + by + cz = X,$$

$$(32) \quad \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

$$(33) \quad \tfrac{1}{2}\varphi(x,y,z) = \tfrac{1}{2}(\lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 - 2\mu' XY - 2\mu'' XZ),$$

$$(34) \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(a)x + \tfrac{1}{2}\varphi'(b)y + \tfrac{1}{2}\varphi'(c)z = \lambda_0 X - \mu' Y - \mu'' Z.$$

Dieselben sind entnommen aus (22), (19), (20). Die letzte Gleichung (34) erhält man, wenn man die vorhergehende (33) partiell nach X differentiirt.

Es liegen also vier homogene Functionen der Variabeln x, y, z vor, (31)—(34), welche durch die Substitutionen (18) transformirt sind.

Wenn wir mit Δ die Functional-Determinante der drei ersten Functionen bezeichnen, so haben wir:

$$(35) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ x, & y, & z \\ \tfrac{1}{2}\varphi'(x), & \tfrac{1}{2}\varphi'(y), & \tfrac{1}{2}\varphi'(z) \end{vmatrix}.$$

Da die Functional-Determinante der Substitutionen gleich 1 ist, so ist nach Satz (42) der siebenten Vorlesung die Functional-Determinante der gegebenen Functionen gleich der Functional-Determinante der transformirten Function. Wir haben demnach:

$$(36)\quad \varDelta = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ X, & Y, & Z \\ \lambda_0 - \mu' Y - \mu'' Z, & \lambda_1 Y - \mu' X, & \lambda_2 Y - \mu'' X \end{vmatrix}$$

und entwickelt:

$$(37)\ \ldots\quad \varDelta = (\lambda_2 - \lambda_1)\, YZ + (\mu' Z - \mu'' Y)\, X.$$

Bezeichnen wir ferner mit V die Functional-Determinante der Functionen (31), (32), (34), so wird:

$$(38)\ \ldots\ldots\quad V = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ x, & y, & z \\ \frac{1}{2}\varphi'(a), & \frac{1}{2}\varphi'(b), & \frac{1}{2}\varphi'(c) \end{vmatrix},$$

und nach demselben Satze der siebenten Vorlesung:

$$(39)\ \ldots\ldots\quad V = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ X, & Y, & Z \\ \lambda_0, & -\mu', & -\mu'' \end{vmatrix},$$

endlich entwickelt:

$$(40)\ \ldots\ldots\quad V = \mu' Z - \mu'' Y.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit X, zieht sie von der Gleichung (37) ab, und dividirt durch $\lambda_2 - \lambda_1$, so erhält man:

$$(41)\ \ldots\ldots\quad YZ = \frac{\varDelta - VX}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Der Zähler dieses Bruches wird, wenn man für X die Substitution (31) macht, eine ganze, homogene Function der Variabeln x, y, z von der zweiten Ordnung. Entwickeln wir denselben wie folgt:

$$(42)\ \ldots\ldots\quad \varDelta - VX = \Sigma\, a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

so werden, wie aus (31), (35), (38) ersichtlich ist, die Coefficienten in der Entwickelung ganze, rationale Ausdrücke der Coefficienten in φ und der gegebenen Coefficienten a, b, c.

Setzen wir nun die Entwickelung (42) des Zählers in (41) ein, so haben wir eine Entwickelung des Productes YZ

nach den Variabeln x, y, z. Eine andere Entwickelung desselben Productes nach denselben Variabeln:

$$YZ = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

haben wir in (41) der achtzehnten Vorlesung vorbereitet, woselbst auch die Werthe (42) der Entwickelungscoefficienten angegeben sind.

Da beide Entwickelungen desselben Productes übereinstimmen müssen, so haben wir:

$$(43) \quad \dots\dots\dots\dots \quad A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{a_{\alpha\beta\gamma}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Setzen wir endlich diese Werthe der Entwickelungscoefficienten in (43) und (44) der achtzehnten Vorlesung, so ergeben sich daraus die Zerlegungen des behandelten Ausdruckes $(\lambda_2 - \lambda_1)^2$ in die Summe von sechs oder von fünf Quadraten:

$$(44) \quad (\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 2(a_{200}^2 + a_{020}^2 + a_{002}^2) + a_{011}^2 + a_{101}^2 + a_{110}^2,$$

$$(45) \quad (\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 3a_{200}^2 + (a_{020} - a_{002})^2 + a_{011}^2 + a_{101}^2 + a_{110}^2, \text{*)}$$

Zerlegungen desselben Ausdruckes in die Summe von zehn oder von sieben Quadraten würde man erhalten, wenn man die mit X multiplicirte Gleichung (41) zum Grunde legen, und schliesslich von den Gleichungen (47) und (49) der achtzehnten Vorlesung Gebrauch machen wollte.

Nachdem wir den, bei den Kreisschnitten der Oberflächen zweiter Ordnung aufgeworfenen Zweifel beseitiget haben, so wenden wir uns zur Bestimmung der Kreisschnitte selbst.

In dieser Absicht legen wir unserer Untersuchung die, in der neunzehnten Vorlesung in (16), (17), (18) hervor-

---

*) Man kann die Bedingung der Gleichheit der Axen eines Kegelschnittes auf einer Oberfläche zweiter Ordnung auch darstellen als die verschwindende Summe von zwei Quadraten, wie Dr. Henrici in Crelles Journal Bd. 64 p. 187 bewiesen hat. Diese Quadrate sind aber nicht mehr ganze Functionen der gegebenen Elemente, sondern Brüche.

Ob die Bedingung der Gleichheit zweier Axen einer Oberfläche zweiter Ordnung sich in ähnlicher Weise als die verschwindende Summe von zwei Quadraten werde darstellen lassen, bleibt eine offene Frage.

gehobenen, einfachsten Formen der Gleichungen der Oberflächen zweiter Ordnung zum Grunde:

$$(46) \quad \begin{aligned} \lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 - 1 &= 0, \\ \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \alpha x &= 0, \\ \lambda_2 z^2 + \alpha x + \beta y &= 0. \end{aligned}$$

Alsdann wird die quadratische Gleichung (27), von welcher die Bestimmung der Hauptaxen des ebenen Schnittes der Oberfläche abhängt, folgende:

$$(47) \quad (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\, a^2 + (\lambda_2 - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)\, b^2 + (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda)\, c^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung werden gleich und die Schnittcurve ein Kreis unter der Bedingung:

$$(48) \quad A^2 a^4 + B^2 b^4 + C^2 c^4 - 2 BC b^2 c^2 - 2 CA c^2 a^2 - 2 AB a^2 b^2 = 0,$$

wenn man, um abzukürzen, setzt:

$$(49) \ldots \quad A = \lambda_1 - \lambda_2, \quad B = \lambda_2 - \lambda_0, \quad C = \lambda_0 - \lambda_1.$$

Diese Gleichung (48) gilt für jede der drei Formen (46), da man nach Belieben eine oder auch zwei von den Grössen λ_0, λ_1, λ_2 gleich 0 setzen kann. Aus ihr werden die Cosinus a, b, c der Winkel festzustellen sein, welche die Normale der Kreisebene mit den Coordinatenaxen bildet. Sie zerfällt in die Factoren:

$$(50) \quad \begin{aligned} &(a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C})\,(-a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C}) \\ \times\, &(a\sqrt{A} - b\sqrt{B} + c\sqrt{C})\,(a\sqrt{A} + b\sqrt{B} - c\sqrt{C}) = 0, \end{aligned}$$

und kann nicht anders erfüllt werden, als wenn einer der Factoren gleich 0 ist. Lassen wir daher vorläufig die Vorzeichen der Quadratwurzelzeichen unentschieden, so haben wir nur die eine Bedingungsgleichung:

$$(51) \ldots \ldots \quad a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C} = 0.$$

Diese eine Gleichung zerfällt aber in zwei Bedingungsgleichungen, weil nach (49) ist:

$$A + B + C = 0,$$

und daher immer eine von den drei Grössen A, B, C das entgegengesetzte Vorzeichen von den beiden anderen hat, wodurch eben das Imaginäre in die Gleichung (51) hineinkommt. Nehmen wir nun an, dass A und C von gleichen Vorzeichen seien, gleichviel, ob eine von den drei Grössen λ_0, λ_1, λ_2 gleich 0 ist, so zerfällt die Gleichung (51) in die beiden Gleichungen:

$$a\sqrt{A} + c\sqrt{C} = 0, \quad b\sqrt{B} = 0,$$

woraus sich mit Berücksichtigung der Vorzeichen der Quadratwurzelgrössen die Bedingungsgleichungen für die Kreisschnitte ergeben:

$$(52) \quad \frac{a}{c} = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}, \quad b = 0.$$

Sie beweisen den Satz:

Die Ebenen der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung sind parallel der mittleren Hauptaxe und bilden mit einer anderen Hauptaxe gleiche Winkel.

Die Bedingung, dass beide Richtungen der Kreisschnitte in eine zusammenfallen, ist entweder $C = 0$ oder $A = 0$, welches gerade die Bedingungen für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung sind. Es fallen daher die beiden Richtungen der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung nur dann in eine Richtung zusammen, wenn die Oberfläche eine Rotationsoberfläche ist.

Nehmen wir, um auch den dritten Fall (46) zu berücksichtigen, an, $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, so zerfällt die Gleichung (51) in die beiden Gleichungen:

$$a = 0, \quad b = 0,$$

woraus ersichtlich ist, dass die Ebenen der Kreisschnitte senkrecht stehen auf der zAxe der Oberfläche. Eine jede auf der zAxe senkrecht stehende Ebene schneidet aber diese Oberfläche in einer geraden Linie. Diese Thatsache widerstreitet jedoch unseren Ansichten nicht, wonach wir eine gerade Linie auch als Kreis betrachten mit unendlich grossem Radius.

Wir werden das Problem der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung einer zweiten, von dem Vorhergehenden unabhängigen Behandlung unterwerfen, welche in grösserer Allgemeinheit die Abhängigkeit desselben von dem Probleme der Hauptaxen der Oberfläche an den Tag legen wird.

Es sei $f(x, y, z, 1) = 0$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung. Hat diese Oberfläche einen Kreisschnitt, so kann man durch denselben eine Kugel $K=0$ hindurchlegen, welche die Oberfläche noch in einem zweiten Kreise schneiden muss. Denn, da die beiden Oberflächen sich in einer, in einer Ebene liegenden Curve, dem Kreise, schneiden, so schneiden sie sich nach den Auseinandersetzungen in der neunten Vorlesung noch in einer zweiten, in einer Ebene liegenden Curve, und, da diese Curve auf der Kugel liegt, in einem zweiten Kreise.

Die beiden Kreise liegen in einem Ebenenpaare $AA_1 = 0$, welches durch den Schnitt der gegebenen Oberfläche und der Kugel hindurchgeht. Man wird daher auf Grund der neunten Vorlesung zwei Factoren λ und μ der Gestalt bestimmen können, dass man identisch hat:

$$(53) \quad \ldots\ldots \quad f(x, y, z, 1) - \lambda K = \mu A A_1 .$$

Umgekehrt, wenn sich die in diese Gleichung eingehenden, unbestimmten Constanten so bestimmen lassen, dass die Gleichung eine identische wird, so wird das als Beweis dienen, dass die gegebene Oberfläche Kreisschnitte habe, und dass diese Kreisschnitte in dem Ebenenpaare $AA_1 = 0$ liegen.

Der Ausdruck:

$$(54) \ldots K = (x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 - R^2$$

enthält die zu bestimmenden Coordinaten A, B, C des Mittelpunktes der Kugel $K = 0$ und den zu bestimmenden Radius R, also vier zu bestimmende Constanten. Das Product $\mu A A_1$ enthält 7 zu bestimmende Constanten. Die identische Gleichung (53) enthält daher, da noch die Constante λ hinzukommt, im Ganzen 12 zu bestimmende Constanten. Sie löset sich aber nur in zehn Bedingungsgleichungen auf, welche die zwölf Constanten nicht vollständig bestimmen können.

Man kann daher auf mehrfache Art die zwölf Constanten so bestimmen, dass sie der Gleichung (53) identisch genügen; weshalb die gegebene Oberfläche Kreisschnitte haben wird.

Um das Problem der Kreisschnitte einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung als ein bestimmtes, algebraisches Problem auszudrücken, wollen wir annehmen, dass die ganz constanten Glieder in A und A_1 gleich 0 seien, was darauf hinauskommt, die Ebenen der Kreisschnitte durch den Coordinatenanfangspunkt gehen zu lassen. Dadurch wird das Problem ein ganz bestimmtes. Denn wir haben die vier, von der Kugel herrührenden Constanten, die fünf in $\mu A A_1$ steckenden Constanten und die Constante λ, also gerade so viel zu bestimmende Constanten, als Gleichungen.

Die vier Constanten der Kugel gehen nur in die vier Glieder der ersten und 0ten Ordnung auf der linken Seite der Gleichung (53) ein. Diese vier Constanten reichen daher aus, um die vier Glieder verschwinden zu machen, da sie den entsprechenden Gliedern des rechten Theiles der Gleichung, welche eben verschwinden, gleich sein sollen. Da nun das Problem der Kreisschnitte weder den Mittelpunkt, noch den Radius der erwähnten Kugel verlangt, so können wir von den Gliedern der ersten und 0ten Ordnung in der identischen Gleichung (53) absehen, und, indem wir nur die Glieder zweiter Ordnung im Auge behalten, auf Grund von (2) und (54) das Problem der Kreisschnitte einer gegebenen Oberfläche $f(x, y, z, 1) = 0$ als ein ganz bestimmtes algebraisches Problem also ausdrücken:

Die Constante λ und die fünf in dem Producte $\mu A A_1$ steckenden Constanten der Art zu bestimmen, dass folgende Gleichung:

$$(55) \quad . \, . \, . \quad \varphi(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = \mu A A_1$$

eine identische Gleichung wird.

Denn $A A_1 = 0$ ist dann die Gleichung des durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Ebenenpaares, welches die gegebene Oberfläche in Kreisen schneidet.

Um dieses algebraische Problem zu lösen, differentiiren wir die identische Gleichung (55) nach den Variabeln, wodurch wir die ebenfalls identischen Gleichungen erhalten:

$$(56) \quad \begin{aligned} \varphi'(x) - 2\lambda x &= \mu A \frac{dA_1}{dx} + \mu A_1 \frac{dA}{dx}, \\ \varphi'(y) - 2\lambda y &= \mu A \frac{dA_1}{dy} + \mu A_1 \frac{dA}{dy}, \\ \varphi'(z) - 2\lambda z &= \mu A \frac{dA_1}{dz} + \mu A_1 \frac{dA}{dz}. \end{aligned}$$

Wir setzen in diesen Gleichungen für die Variabeln x, y, z die Werthe a, b, c derselben, welche den Gleichungen:

$$A = 0, \quad A_1 = 0$$

zugleich genügen, also die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Schnittlinie der Ebenen $A = 0$ und $A_1 = 0$, wodurch wir erhalten:

$$(57) \quad \begin{aligned} \varphi'(a) - 2\lambda a &= 0, \\ \varphi'(b) - 2\lambda b &= 0, \\ \varphi'(c) - 2\lambda c &= 0. \end{aligned}$$

Dieses sind dieselben Gleichungen, welche wir in (7) der neunzehnten Vorlesung zur Bestimmung der Richtung der Hauptaxen aufgestellt haben. Aus ihnen geht durch Elimination von a, b, c die in Rücksicht auf λ kubische Gleichung $\Delta = 0$ hervor, deren Wurzeln $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ die Gleichung (55) zu einer identischen machen. Es entspricht daher einer jeden von diesen Wurzeln ein Ebenenpaar $\mu A A_1 = 0$, welches einer der drei Hauptaxen der Oberfläche parallel ist und die Oberfläche in Kreisen schneidet.

Statt eines Ebenenpaares, wie vorhin, haben wir jetzt drei Ebenenpaare für die Kreisschnitte der gegebenen Oberfläche, deren Gleichungen wir erhalten, wenn wir in der Gleichung:

$$(58) \quad \varphi(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

für λ nach einander die drei Wurzeln $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ setzen.

Von diesen drei Ebenenpaaren ist jedoch nur dasjenige reell, welches der mittleren Wurzel entspricht. Denn, trans-

formiren wir die beiden Glieder, woraus der linke Theil der angegebenen Gleichung zusammengesetzt ist, durch die Substitutionen (1) der neunzehnten Vorlesung in (2) und (3) derselben Vorlesung, so stellt sich die Gleichung (58) so dar:

$$(59) \ldots (\lambda_0 - \lambda)X^2 + (\lambda_1 - \lambda)Y^2 + (\lambda_2 - \lambda)Z^2 = 0,$$

deren linker Theil nur für den Werth von λ, gleich der mittleren Wurzel λ_0, λ_1, λ_2, gleich ist der Differenz zweier Quadrate, während derselbe für die beiden anderen Wurzeln gleich ist der Summe zweier Quadrate. Deshalb ist das Ebenenpaar (58) im ersten Falle reell, im anderen Falle imaginär.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Krümmungsradien der Normalschnitte und schiefen ebenen Schnitte der Oberflächen.

Für eine, in rechtwinkligen Coordinaten x, y gegebene Gleichung irgend einer ebenen Curve:

$$(1) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad u = 0$$

werden wir zur Erhaltung der Symmetrie in der folgenden Untersuchung der Krümmungsradien mit Einführung einer neuen, unabhängigen Variable t zwei Gleichungen substituiren:

$$(2) \ldots \ldots \ldots \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

der Art, dass, wenn man die Werthe von x und y aus (2) in (1) setzt, man eine, in t identische, Gleichung erhält.

Die Function $f(t)$ soll eine beliebig gewählte, aber nach der Wahl ein für alle Mal bestimmte Function von t sein. Die Function $\varphi(t)$ erhält man dann, wenn man den Werth von $x = f(t)$ in die Gleichung $u = 0$ setzt, und dieselbe nach y auflöset.

In dieser Voraussetzung erhält man aus (2) die Coordinaten x, y aller Punkte der gegebenen Curve (1), wenn man

der unabhängigen Variable t alle möglichen Werthe zuertheilt. Man erhält die Gleichung (1) der Curve selbst, wenn man t aus den beiden Gleichungen (2) eliminirt. Diese Gleichung (1) wird eine in t identische Gleichung, wenn man sich die Werthe von x und y aus (2) in dieselbe substituirt denkt. In dieser letzteren Hypothese kann man die Gleichung (1) so oft nach t differentiiren, als man will, und erhält dadurch immer wieder, in Rücksicht auf t, identische Gleichungen.

Differentiirt man die gegebene, in t identische Gleichung ein oder zwei Mal nach t, so dient die gegebene Gleichung als Definition von y; die erste Differentialgleichung dient, um $\frac{dy}{dt} = y'$, und die zweite Differentialgleichung, um $\frac{d^2y}{dt^2} = y''$ zu bestimmen.

Betrachten wir nun irgend einen Punkt p der gegebenen Curve (1) mit den Coordinaten:

$$p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x, \quad y,$$

wie sie durch die Gleichungen (2) als Functionen des, dem Punkte p entsprechenden Werthes von t gegeben sind, und setzen unter der Annahme, dass dt eine verschwindend kleine Grösse sei, $t + dt$ für t in die Gleichungen (2), so erhalten wir die Coordinaten eines zweiten, dem Punkte p unendlich nahen Punktes q der Curve:

$$q) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x + x'dt, \quad y + y'dt.$$

Die gerade Linie, welche beide Punkte mit einander verbindet:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad (X - x)y' - (Y - y)x' = 0$$

ist die Tangente der Curve in dem Punkte p mit den variabeln Coordinaten X, Y.

Differentiirt man die Gleichung (1) nach t und setzt, um abzukürzen, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_1$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u_0 x' + u_1 y' = 0,$$

mittelst welcher man der Gleichung der Tangente (3) die Gestalt geben kann:

$$(5) \ldots\ldots \quad (X - x)u_0 + (Y - y)u_1 = 0.$$

Die Coordinaten x, y eines Punktes einer zweiten Curve:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = 0$$

kann man wieder als Functionen einer und derselben unabhängigen Variable t darstellen wie folgt:

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad x = f(t), \quad y = \psi(t).$$

Diese Curve geht durch den genannten Punkt p, wenn für den ihm entsprechenden Werth von t der Werth von y in $u = 0$ gleich ist dem Werthe von y in $v = 0$. Sie geht überdies durch den Punkt q, wenn der Werth von y' in (4) dem Werthe von y' in der analogen Differentialgleichung:

$$(8) \ldots\ldots\ldots \quad v_0 x' + v_1 y' = 0$$

gleich ist. Denn die Werthe von x und x' für die beiden Curven sind nach (2) und (7) einander gleich.

Zwei Curven berühren sich in der ersten Ordnung, wenn sie beide durch zwei unendlich nahe Punkte hindurchgehen. Die Bedingungen einer solchen Berührung sind demnach, dass die Werthe von y und y' für den Berührungspunkt, aus der Gleichung der einen Curve und aus ihrer Differentialgleichung in die Gleichung der anderen Curve und ihre Differentialgleichung gesetzt, den Gleichungen genügen. Es haben daher zwei sich berührende Curven in dem Berührungspunkte dieselbe Tangente.

Betrachten wir einen dritten Punkt r der Curve $u = 0$, dem zweiten q unendlich nahe, dessen Coordinaten:

$$r) \ldots \quad x + 2x'dt + x''dt^2, \quad y + 2y'dt + y''dt^2$$

aus den Coordinaten des Punktes q dadurch hervorgehen, dass man $t + dt$ setzt für t, so bemerken wir, dass zur Bestimmung derselben noch die Differentialgleichung zweiter Ordnung der gegebenen Curve $u = 0$ erforderlich ist:

$$(9) \ldots \quad u_{00}x'^2 + 2u_{01}x'y' + u_{11}y'^2 + u_0 x'' + u_1 y'' = 0,$$

in welcher durch u_{00}, u_{01}, u_{11} die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u nach den Variabeln x, y ausgedrückt sind.

Soll nun die Curve $v = 0$ auch durch diesen Punkt gehen, so muss auch das y'' aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(10) \ldots \quad v_{00}x'^2 + 2v_{01}x'y' + v_{11}y'^2 + v_0x'' + v_1y'' = 0$$

dieser Curve dem y'' aus der vorhergehenden Differentialgleichung für den Berührungspunkt p gleich sein.

Man sagt, zwei Curven berühren sich in der zweiten Ordnung, wenn sie beide durch drei unendlich nahe Punkte hindurchgehen. Man erhält demnach die drei Bedingungen für eine Berührung zweier Curven in der zweiten Ordnung, wenn man aus der Gleichung der einen Curve und ihren beiden Differentialgleichungen die Werthe von y, y', y'' in die Gleichung der anderen Curve und in ihre beiden Differentialgleichungen setzt.

Ist die zweite, die erste Curve $u = 0$ in der zweiten Ordnung berührende Curve ein Kreis:

$$(11) \ldots\ldots \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

so nennt man den Kreis Krümmungskreis, den durch die Coordinaten a, b bestimmten Mittelpunkt den Krümmungsmittelpunkt und den Radius r desselben den Krümmungsradius für denjenigen Punkt der Curve $u = 0$, in welchem die Berührung zweiter Ordnung statt hat.

Die Bedingungen für den Krümmungskreis sind demnach folgende drei Gleichungen:

$$(12) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 &= 0, \\ (x - a)x' + (y - b)y' &= 0, \\ x'^2 + y'^2 + (x - a)x'' + (y - b)y'' &= 0, \end{aligned}$$

in welchen man sich für y, y', y'' die Werthe substituirt denken muss, wie sie sich aus der Gleichung der Curve (1), $u = 0$, und ihren beiden Differentialgleichungen (4) und (9) ergeben. Die beiden letzten von den Gleichungen (12) bestimmen die

Coordinaten a, b des Krümmungsmittelpunktes, die erste Gleichung den Krümmungsradius.

Um den Krümmungsmittelpunkt der Curve $u = 0$ für einen gegebenen Punkt p derselben in anderer Weise festzustellen, bemerken wir, dass die Gleichung der Normale der Curve in dem Punkte p, das heisst der geraden Linie, welche in diesem Punkte auf der Tangente (3) senkrecht steht, ist:

$$(x - a)x' + (y - b)y' = 0,$$

wenn wir mit a, b die variabeln Coordinaten der Punkte der Normale bezeichnen.

Setzen wir in dieser Gleichung $x + x'dt$, $y + y'dt$ respective für x, y, so erhalten wir die Gleichung der im Punkte q errichteten Normale der Curve $u = 0$:

$$\{(x-a)x'+(y-b)y'\} + \{x'^2+y'^2+(x-a)x''+(y-b)y''\}\, dt = 0,$$

und daher die Coordinaten a, b des Schnittpunktes beider Normalen aus den Gleichungen:

$$(x - a)x' + (y - b)y' = 0,$$
$$x'^2 + y'^2 + (x - a)x'' + (y - b)y'' = 0.$$

Da diese Gleichungen aber gerade die beiden letzten Gleichungen (12) sind, welche dort die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes bestimmten, so können wir sagen:

Zwei auf einander folgende, unendlich nahe Normalen einer Curve schneiden sich in dem Mittelpunkte des Krümmungskreises, der die Curve in den Fusspunkten der Normalen in der zweiten Ordnung berührt.

Wir werden uns dieses Satzes bedienen, um den Krümmungsmittelpunkt und den Krümmungsradius eines Normalschnittes einer gegebenen Oberfläche zu bestimmen.

Es sei die, in rechtwinkligen Coordinaten x, y, z gegebene Gleichung irgend einer Oberfläche:

(13) . . . . $u = 0,$

und die Coordinaten eines beliebig angenommenen Punktes p auf derselben:

$p)$ . . . . $x, y, z.$

Alsdann weiss man nach den Auseinandersetzungen im Anfange der dreiundzwanzigsten Vorlesung, dass die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Oberfläche in dem Punkte p mit den Coordinatenaxen bildet, sich verhalten, wie die partiellen Differentialquotienten der Function u nach den Variabeln x, y, z genommen, also wie:

$$u_0 : u_1 : u_2 .$$

Sind nun die Coordinaten eines variabeln Punktes P auf der Normale der Oberfläche in dem Punkte p:

$P)$ . . . . $a, b, c,$

so hat man die Gleichungen der Normale mit dem variabeln Factor μ:

$$(14) \quad \ldots \ldots \quad \begin{aligned} x - a &= \mu u_0 , \\ y - b &= \mu u_1 , \\ z - c &= \mu u_2 . \end{aligned}$$

Eine Ebene $A = 0$, beliebig durch diese Normale gelegt, schneiden die gegebene Oberfläche $u = 0$ in einem Normalschnitte des Punktes p. Der Normalschnitt der Oberfläche ist daher gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$(15) \quad \ldots \ldots \quad u = 0, \quad A = 0.$$

Diese beiden Gleichungen ersetzen wir zur Aufrechthaltung der Symmetrie durch drei Gleichungen mit der einen unabhängigen Variable t:

$$(16) \quad \ldots \ldots \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

indem wir die Function $x = f(t)$ beliebig wählen, die beiden anderen aber $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ uns, nach Substitution von $x = f(t)$ in die Gleichungen (15) gesetzt, aus ihnen berechnet vorstellen.

Dieses vorausgesetzt, sind nun die Coordinaten eines dem Punkte p unendlich nahen Punktes q auf dem Normalschnitt:

$$q) \ldots\ldots \quad x + x'dt, \quad y + y'dt, \quad z + z'dt,$$

und demnach ist:

$$(17) \ldots \quad (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = 0$$

die Gleichung der Ebene, welche im Punkte p senkrecht steht auf der Verbindungslinie pq der beiden Punkte p und q, das ist der Normalebene des Normalschnittes im Punkte p. In ihr liegt die Normale (14) der Oberfläche, weil sie ebenfalls eine Normalebene der Oberfläche im Punkte p ist, was auch daraus erhellet, dass sich die Gleichung (17) zusammensetzen lässt aus den Gleichungen (14) der Normale, da man durch Differentiation der in t identischen Gleichung $u = 0$ hat:

$$(18) \ldots\ldots \quad u_0 x' + u_1 y' + u_2 z' = 0.$$

Die Gleichung der Normalebene (17) des Normalschnittes (15) geht über in die Gleichung der Normalebene desselben Normalschnittes im Punkte q, wenn man setzt $t + dt$ für t:

$$(x + x'dt - a)(x' + x''dt) + (y + y'dt - b)(y' + y''dt) \\ + (z + z'dt - c)(z' + z''dt) = 0,$$

und wenn man entwickelt mit Vernachlässigung der zweiten Potenz von dt, in:

$$(19) \quad \begin{aligned} &\{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'\} \\ &+ \{x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z''\}\, dt = 0. \end{aligned}$$

Sowohl in der Ebene (17) als in der Ebene (19) liegt der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes. Denn die beiden Ebenen schneiden die Ebene des Normalschnittes in zwei geraden Linien, welche zwei auf einander folgende, unendlich nahe Normalen des Normalschnittes sind. Zieht man daher die Gleichung (17) von der Gleichung (19) ab, so erhält man die Gleichung einer Ebene:

$$(20) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' = 0,$$

welche ebenfalls durch den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes geht.

Wir haben nun die Ebene (20) und die Normale (14) der Oberfläche, welche beide durch den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes gehen. Der Schnittpunkt beider wird der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes sein. Um ihn zu bestimmen hat man seine Coordinaten a, b, c zugleich mit dem Werthe von μ aus den vier Gleichungen (20) und (14) zu berechnen.

Substituiren wir zu diesem Zwecke (14) in (20), so erhalten wir:

$$\mu = -\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{u_0 x'' + u_1 y'' + u_2 z''},$$

und wenn wir diesen Werth von μ substituiren in (14), so geben jene Gleichungen die Coordinaten a, b, c des Mittelpunktes der Krümmung des Normalschnittes.

Dem angegebenen Werthe von μ werden wir jedoch eine andere, leichter aufzufassende Gestalt geben mit Zuziehung der Gleichung, welche wir durch zweimalige Differentiation der in t identischen Gleichung $u = 0$ erhalten. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke mit u_{00}, u_{01}, u_{11}, ... die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u, nach den Variabeln x, y, z genommen, und, um weiter abzukürzen, mit $\varphi(x', y', z')$ den Ausdruck:

$$(21)\quad \varphi(x', y', z') = u_{00}x'^2 + u_{11}y'^2 + u_{22}z'^2 + 2u_{12}y'z' + 2u_{20}z'x' + 2u_{01}x'y',$$

so erhalten wir durch zweimalige Differentiation der Gleichung $u = 0$ nach t:

$$(22)\ \ldots\quad \varphi(x', y', z') + u_0 x'' + u_1 y'' + u_2 z'' = 0,$$

und daher den Werth von μ:

$$\mu = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\varphi(x', y', z')}$$

als einen Ausdruck der Coordinaten $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$ des Punktes q in dem rechtwinkligen, parallelen Coordinatensysteme, dessen Ursprung im Punkte p liegt. Bezeichnen wir daher mit α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente pq

des Normalschnittes im Punkte p mit den Coordinatenaxen bildet, so haben wir:

$$(23) \ldots\ldots\ldots \quad \mu = \frac{1}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Setzen wir diesen Werth von μ in (14) ein, quadriren die einzelnen Gleichungen und addiren sie, so erhalten wir das Quadrat des Krümmungsradius r des Normalschnittes und daraus:

$$(24) \ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Diese Formel giebt die Krümmungsradien sämmtlicher Normalschnitte der gegebenen Oberfläche $u=0$ in dem Punkte p derselben, wenn die Tangente pq in der Tangentenebene der Oberfläche sich um den Punkt p beliebig dreht.

Um eine Vorstellung zu bekommen von dem Wachsen und Abnehmen der Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte der Oberfläche in dem Punkte p, tragen wir die Quadratwurzel des Krümmungsradius als gerade Linie auf die Tangente des Normalschnittes vom Punkte p aus auf. Der Endpunkt q_1 der geraden Linie habe in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme, mit dem Ursprung p, die Coordinaten x_1, y_1, z_1. Alsdann ist:

$$\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{r}}, \quad \beta = \frac{y_1}{\sqrt{r}}, \quad \gamma = \frac{z_1}{\sqrt{r}}.$$

Setzen wir diese Werthe von α, β, γ in die Gleichung (24), so erhalten wir:

$$(25) \ldots \quad \varphi(x_1, y_1, z_1) - \sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)} = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung mit dem Mit) telpunkte p, auf welcher der Punkt q_1 liegt. Da aber der Punkt q_1 überdies noch in der Tangentenebene der Oberfläche $u = 0$ liegt, so hat man ferner:

$$(26) \ldots\ldots \quad u_0 x_1 + u_1 y_1 + u_2 z_1 = 0,$$

die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Oberfläche (25- gehenden Ebene. Der Schnitt dieser Ebene (26) und der

Oberfläche zweiter Ordnung (25), ein Kegelschnitt, ist der geometrische Ort des Punktes q_1.

Man braucht daher nur die Halbmesser dieses Kegelschnittes zu kennen, um die Krümmungsradien der Normalschnitte der gegebenen Oberfläche $u = 0$ zu bestimmen. Denn die Quadrate der Halbmesser sind eben die Längen der Krümmungsradien der Normalschnitte, für welche die Halbmesser Tangenten sind.

Diese Bemerkung kann dazu dienen, Sätze über Halbmesser eines Kegelschnittes in Sätze über Krümmungsradien der Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte der Oberfläche zu übertragen.

So wissen wir zum Beispiel aus der sechsundzwanzigsten Vorlesung, „dass die Summe der reciproken Quadrate zweier, auf einander senkrecht stehenden Halbmesser eines Kegelschnittes eine constante Grösse ist“, woraus unmittelbar der Satz hervorgeht:

Die Summe der reciproken Krümmungsradien zweier, auf einander in einem gegebenen Punkte einer Oberfläche senkrecht stehenden Normalschnitte ist eine constante Grösse.

Denken wir uns ferner den durch (25) und (26) gegebenen Kegelschnitt auf die Hauptaxen desselben bezogen:

$$\frac{x^2}{r_0} + \frac{y^2}{r_1} - 1 = 0,$$

so bezeichnen r_0 und r_1 die Krümmungsradien derjenigen Normalschnitte, deren Tangenten in die Hauptaxen des Kegelschnittes fallen. Ist nun r der Krümmungsradius irgend eines anderen Normalschnittes, der mit den genannten beiden, auf einander senkrecht stehenden Normalschnitten die Winkel α und β bildet, so ist der, diesem Krümmungsradius entsprechende Halbmesser des Kegelschnittes gleich $\sqrt{r}$, und daher die senkrechten Projectionen des im Punkte x, y des Kegelschnittes endigenden Halbmessers auf die Hauptaxen des Kegelschnittes:

$$x = \sqrt{r} \,.\, \cos\alpha, \quad y = \sqrt{r} \,.\, \cos\beta.$$

Setzen wir aber diese Werthe von x und y in die Gleichung

des Kegelschnittes, so erhalten wir die Relation von Euler zwischen den drei Krümmungsradien der Normalschnitte der Oberfläche:

$$(27) \quad \frac{\cos^2\alpha}{r_0} + \frac{\cos^2\beta}{r_1} - \frac{1}{r} = 0.$$

Wir werden jetzt den Krümmungsmittelpunkt und den Krümmungsradius eines schiefen, aber ebenen, durch den Punkt p gehenden Schnittes der Oberfläche $u = 0$ bestimmen.

Wir können, ohne den schiefen Schnitt zu beschränken, annehmen, dass derselbe durch den vorhin bezeichneten Punkt q gehe. Denn der Normalschnitt der Oberfläche lässt sich um die Normale der Oberfläche so drehen, dass der Punkt q desselben in den schiefen Schnitt fällt. Wir bringen diese beiden Schnitte der Oberfläche mit einander in Verbindung, um den Krümmungsradius des einen durch den anderen auszudrücken.

Wenn nun $A_1 = 0$ die Gleichung der, die Oberfläche $u = 0$ in schiefer Richtung schneidenden Ebene ist, so haben wir für den schiefen Schnitt die Gleichungen:

$$(28) \quad u = 0, \quad A_1 = 0,$$

welche wir uns durch drei Gleichungen von der Form (16) mit der unabhängigen Variable t der Art ersetzt denken, dass durch Substitution der Werthe von x, y, z in die beiden Gleichungen (28) diesen Gleichungen identisch in t genügt wird.

Die Normalebene des Normalschnittes im Punkte p:

$$(29) \quad (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = 0$$

ist zugleich die Normalebene des schiefen Schnittes in demselben Punkte, weil die gerade Linie pq gemeinschaftliche Tangente ist.

Aus der angegebenen Gleichung der Normalebene (29) des schiefen Schnittes im Punkte p erhalten wir die Gleichung der Normalebene desselben Schnittes im Punkte q, wenn wir für t setzen $t + dt$, wodurch die Gleichung übergeht in:

$$(30) \quad \begin{aligned} &\{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'\} \\ &+ \{x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x-a)x'' + (x-b)y'' + (z-c)z''\}\, dt = 0. \end{aligned}$$

Beide Normalebenen gehen durch den Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnittes, weil sie die Ebene des schiefen Schnittes in zwei unendlich nahen, auf einander folgenden Normalen schneiden. Die Differenz beider Gleichungen:

$$(31)\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' = 0$$

ist daher die Gleichung einer Ebene, welche durch den Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnittes geht. Ihr haben deshalb die Coordinaten a, b, c des Krümmungsmittelpunktes jenes Schnittes zu genügen.

Wenn wir mit A, B, C die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die im Punkte p in der Ebene des schiefen Schnittes liegende Normale dieses Schnittes mit den Coordinatenaxen bildet, so haben wir die Gleichungen der Normale:

$$(32)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} x-a &= \varrho A, \\ y-b &= \varrho B, \\ z-c &= \varrho C. \end{aligned}$$

Da auf ihr der gesuchte Krümmungsmittelpunkt liegt, so haben wir aus den vier Gleichungen (31) und (32) die Werthe von a, b, c, ϱ, die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Krümmungsradius des schiefen Schnittes, zu berechnen.

Die Substitutionen von (32) in (31) geben den gesuchten Werth des Krümmungsradius:

$$\varrho = -\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{Ax'' + By'' + Cz''}.$$

Um diesen Ausdruck weiter zu transformiren, wollen wir annehmen, dass die Gleichung $A_1 = 0$ der Schnittebene in der Normalform gegeben sei: $A_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0$. Alsdann haben wir folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' &= 0, \\ u_0 x' + u_1 y' + u_2 z' &= 0, \\ \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' &= 0, \end{aligned}$$

welche der Reihe nach ausdrücken, dass die Tangente des schiefen Schnittes im Punkte p senkrecht steht auf der Nor-

male (32), auf der Normale der Oberfläche und auf der Normale der, die Oberfläche schneidenden Ebene $A_1 = 0$. Da alle drei Gleichungen zugleich stattfinden, so lassen sich zwei Factoren m und n bestimmen der Art, dass man hat:

$$A = mu_0 + n\alpha_1,$$
$$B = mu_1 + n\beta_1,$$
$$C = mu_2 + n\gamma_1.$$

Setzen wir diese Werthe von A, B, C in den angegebenen Ausdruck des Krümmungsradius ϱ ein, und bemerken, dass man hat:

$$\alpha_1 x'' + \beta_1 y'' + \gamma_1 z'' = 0,$$

welche Gleichung aus der in t identischen Gleichung:

$$A_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0,$$

durch zweimalige Differentiation gewonnen wird, so erhalten wir:

$$\varrho = -\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{m(u_0 x'' + u_1 y'' + u_2 z'')},$$

oder mit Rücksicht auf (22):

$$\varrho = \frac{x'^2 + y^{2'} + z'^2}{m\varphi(x', y', z')},$$

oder endlich mit Rücksicht auf (23) und die ihr vorhergehende Gleichung:

$$\varrho = \frac{1}{m\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Es bleibt noch übrig, den Werth von m in dieser Gleichung zu bestimmen. Zu diesem Zwecke multipliciren wir obige drei Gleichungen, in welche die Factoren m und n eingeführt wurden, respective mit A, B, C und addiren. Da aber $\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = 0$ ist, weil die Normale des schiefen Schnittes in der Ebene des Schnittes liegt, so haben wir:

$$1 = m(u_0 A + u_1 B + u_2 C)$$

und darum:

$$\varrho = \frac{u_0 A + u_1 B + u_2 C}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Bemerken wir endlich, dass der Cosinus des Winkels $(r\varrho)$, den die Krümmungsradien r und ϱ mit einander bilden, ist:

$$\cos(r\varrho) = \frac{u_0 A + u_1 B + u_2 C}{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}},$$

so erhalten wir durch Vergleichung des angegebenen Werthes von ϱ mit dem Werthe von r in (24):

$$(33) \quad \varrho = r \cos(r\varrho).$$

Da nun der Neigungswinkel der beiden Krümmungsradien zugleich der Neigungswinkel der Ebene des Normalschnittes und der Ebene des schiefen Schnittes ist, so drückt die Gleichung (33) den Satz aus:

Die senkrechte Projection des Krümmungsmittelpunktes eines Normalschnittes in einem gegebenen Punkte einer Oberfläche auf einen schiefen Schnitt der Oberfläche, der dieselbe Tangente in dem gegebenen Punkte hat als der Normalschnitt, ist der Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnittes.

Dreissigste Vorlesung.

Krümmungscurven der Oberflächen.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung die Quadratwurzel aus dem Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes einer gegebenen Oberfläche $u = 0$ in einem gegebenen Punkte p derselben als denjenigen Halbmesser des durch die Gleichungen (25) und (26):

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) - \sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)} = 0,$$

$$(2) \quad u_0 x + u_1 y + u_2 z = 0$$

gegebenen Kegelschnittes dargestellt, der den Normalschnitt

in dem gegebenen Punkte p berührt. Diese Darstellungsweise haben wir dazu benutzt, um Sätze über Halbmesser eines Kegelschnittes auf Krümmungsradien der Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben zu übertragen.

Zu den übertragbaren Sätzen gehört vorzugsweise der, „dass die Maxima oder Minima der Halbmesser eines Kegelschnittes die Hauptaxen desselben sind, und dass diese auf einander senkrecht stehen.“ Uebertragen wir diesen Satz nach dem angegebenen Prinzipe auf die Krümmungsradien der Normalschnitte, so geht daraus der Satz hervor:

Die Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben, deren Krümmungsradien Maxima oder Minima sind, stehen auf einander senkrecht.

Wir werden diesen, in der Theorie der Oberflächen wichtigsten Satz noch besonders beweisen mit Hülfe der Regeln für die Herleitung der Maxima und Minima der Functionen, wie sie die Differentialrechnung lehrt.

Zu diesem Zwecke suchen wir das Maximum oder Minimum des, in der vorhergehenden Vorlesung in (24) ausgedrückten Krümmungsradius r des Normalschnittes:

$$(3) \quad \dots\dots\dots \quad r = \frac{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} .$$

Da der Zähler dieses Ausdruckes eine Constante ist, die nur abhängt von der Lage des unveränderlichen Punktes p auf der gegebenen Oberfläche, so wird r ein Maximum oder Minimum, wenn $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ein Minimum oder Maximum wird. Es handelt sich also darum, die Function $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ der variabeln Cosinus α, β, γ der Tangente des Normalschnittes zu einem Minimum oder Maximum zu machen, während zwischen den genannten Cosinus die beiden Bedingungsgleichungen bestehen:

$$(4) \quad \dots\dots\dots \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0 ,$$

$$(5) \quad \dots\dots\dots \quad u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma = 0.$$

Um diese Aufgabe zu lösen, schreibt die Differentialrechnung vor, aus der gegebenen Function und aus den, respective mit $-\lambda$ und 2μ multiplicirten, linken Theilen der beiden Bedingungsgleichungen den Ausdruck zu bilden:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) + 2\mu(u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma), \tag{6}$$

und das Minimum oder Maximum dieses Ausdruckes so zu bestimmen, als ob sowohl α, β, γ als auch λ und μ von einander unabhängige Variabeln wären. Die Werthe der Variabeln, welche die componirte Function (6) zu einem Minimum oder Maximum machen, machen dann auch die Function $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ unter den Bedingungen (4) und (5) zu einem Minimum oder Maximum.

Setzen wir nun, um das Minimum oder Maximum der Function (6) nach der genannten Regel festzustellen, die partiellen Differentialquotienten der Function (6), nach den fünf Variabeln genommen, gleich 0, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} &\varphi'(\alpha) - 2\lambda\alpha + 2\mu u_0 = 0, \\ &\varphi'(\beta) - 2\lambda\beta + 2\mu u_1 = 0, \\ &\varphi'(\gamma) - 2\lambda\gamma + 2\mu u_2 = 0, \\ &u_0\alpha \;\; + u_1\beta \; + u_2\gamma \;\; = 0, \end{aligned}$$

und die Gleichung (4), welche zur Bestimmung der Werthe der fünf Variabeln dienen.

Entwickeln wir das, in Beziehung auf die Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ lineare, homogene System Gleichungen (7):

$$(8) \quad \begin{array}{lllll} (u_{00}-\lambda)\alpha & + u_{01}\beta & + u_{02}\gamma & + u_0\mu & = 0, \\ u_{10}\alpha & + (u_{11}-\lambda)\beta & + u_{12}\gamma & + u_1\mu & = 0, \\ u_{20}\alpha & + u_{21}\beta & + (u_{22}-\lambda)\gamma & + u_2\mu & = 0, \\ u_0\alpha & + u_1\beta & + u_2\gamma & & = 0, \end{array}$$

und eliminiren die genannten Unbekannten, so erhalten wir die, in λ quadratische Gleichung:

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} u_{00}-\lambda, & u_{01}, & u_{02}, & u_0 \\ u_{10}, & u_{11}-\lambda, & u_{12}, & u_1 \\ u_{20}, & u_{21}, & u_{22}-\lambda, & u_2 \\ u, & u_{10}, & u_2, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche den Beweis liefert, dass die Krümmungsradien der Normalschnitte zwei Maxima oder Minima haben.

Durch die Wurzeln dieser Gleichung drücken sich nun sogleich die Maxima oder Minima der Krümmungsradien der Normalschnitte aus. Denn, multipliciren wir die drei ersten Gleichungen (7) respective mit α, β, γ und addiren, so erhalten wir mit Rücksicht auf die letzte Gleichung (8):

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \lambda = 0,$$

und daher aus (3) das Maximum oder Minimum des Krümmungsradius:

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad r = \frac{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}}{\lambda}.$$

Hat man den Werth einer Wurzel λ der quadratischen Gleichung (9) ermittelt und damit zugleich das Maximum oder Minimum des Krümmungsradius (10) bestimmt, so erhält man aus den drei ersten Gleichungen (8) in linearer Weise die Verhältnisse $\frac{\alpha}{\mu}$, $\frac{\beta}{\mu}$, $\frac{\gamma}{\mu}$ der Cosinus der Winkel, welche die Tangente des, dem Maximum oder Minimum des Krümmungsradius ensprechenden, Normalschnittes mit den Coordinatenaxen bildet, und die Gleichung (4) giebt die Cosinus selbst.

Um die Lage der beiden Normalschnitte zu einander, welche dem Maximum oder Minimum des Krümmungsradius entsprechen, zu ermitteln, wollen wir annehmen, dass λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung (9) seien. Der ersten Wurzel mögen die Werthe α_1, β_1, γ_1, μ_1, der zweiten die Werthe α_2, β_2, γ_2, μ_2 von α, β, γ, μ entsprechen, welche deshalb, in (7) eingesetzt, diesen Gleichungen genügen:

$$(11) \quad \begin{array}{ll}
\varphi'(\alpha_1) - 2\lambda_1\alpha_1 + 2\mu_1 u_0 = 0, & \varphi'(\alpha_2) - 2\lambda_2\alpha_2 + 2\mu_2 u_0 = 0, \\
\varphi'(\beta_1) - 2\lambda_1\beta_1 + 2\mu_1 u_1 = 0, & \varphi'(\beta_2) - 2\lambda_2\beta_2 + 2\mu_2 u_1 = 0, \\
\varphi'(\gamma_1) - 2\lambda_1\gamma_1 + 2\mu_1 u_2 = 0, & \varphi'(\gamma_2) - 2\lambda_2\gamma_2 + 2\mu_2 u_2 = 0, \\
u_0\alpha_1 + u_1\beta_1 + u_2\gamma_1 = 0, & u_0\alpha_2 + u_1\beta_2 + u_2\gamma_2 = 0.
\end{array}$$

Multipliciren wir nun die drei ersten Gleichungen des ersten Systemes respective mit α_2, β_2, γ_2 und addiren, multipliciren wir ferner die drei ersten Gleichungen des zweiten

Systemes respective mit α_1, β_1, γ_1 und addiren, so erhalten wir mit Rücksicht auf die unbenutzt gelassenen Gleichungen in (11):

$$\alpha_2\varphi'(\alpha_1) + \beta_2\varphi'(\beta_1) + \gamma_2\varphi'(\gamma_1) = 2\lambda_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2).$$
$$\alpha_1\varphi'(\alpha_2) + \beta_1\varphi'(\beta_2) + \gamma_1\varphi'(\gamma_2) = 2\lambda_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2).$$

Ziehen wir endlich diese beiden Gleichungen, deren linke Theile einander gleich sind, von einander ab, so erhalten wir:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2).$$

Da nun der erste Factor des rechten Theiles dieser Gleichung nicht verschwinden kann, weil λ_1 und λ_2 verschiedene Wurzeln der quadratischen Gleichung (9) sind, so hat man die Gleichung:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Aus der geometrischen Interpretation dieser Gleichung geht eben der oben angeführte Satz hervor.

Die Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben, deren Krümmungsradien Maxima oder Minima sind, nennt man *Hauptschnitte* der Oberfläche in dem gegebenen Punkte. Auf Grund dieser Definition lässt sich der angegebene Satz auch so ausdrücken:

Die Hauptschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben stehen auf einander senkrecht.

Aus den Bedingungsgleichungen (7) für die Cosinus α, β, γ der Winkel, welche die Tangenten der Hauptschnitte mit den Coordinatenaxen bilden, gehen durch Elimination von λ und μ die Gleichungen hervor:

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \varphi'(\alpha), & \varphi'(\beta), & \varphi'(\gamma) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma = 0,$$

welchen jene Cosinus ebenfalls genügen müssen.

Die erste von diesen Gleichungen stellt, wenn man α, β, γ als die Coordinaten eines Punktes betrachtet in einem Coordinatensysteme, dessen Anfangspunkt der Punkt p ist, einen Kegel zweiter Ordnung dar mit der Spitze in p, in welchem die Tangenten der Hauptschnitte liegen. Die zweite Gleichung ist die Gleichung der Tangentenebene der Oberfläche im Punkte p. Es schneidet daher die Ebene den Kegel in den beiden auf einander senkrecht stehenden Tangenten der Hauptschnitte in dem Punkte p.

Auf diese Bemerkung gestützt, werden wir nun die Bedingungen für eine Curve auf der gegebenen Oberfläche $u=0$ entwickeln, deren Tangenten sämmtlich Tangenten der Hauptschnitte der Oberfläche sind.

Es sei p irgend ein Punkt dieser Curve, dessen Coordinaten:

$$p) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x, \quad y, \quad z$$

wir als zu bestimmende Functionen der einzigen, unabhängigen Variable t betrachten. Die Coordinaten eines, diesem Punkte unendlich nahen Punktes q auf der Curve seien in dieser Voraussetzung:

$$q) \ldots\ldots \quad x+x'dt, \quad y+y'dt, \quad z+z'dt.$$

Die Differenzen:

$$dx=x'dt, \quad dy=y'dt, \quad dz=z'dt$$

sind dann die Coordinaten des Punktes q in einem Coordinatensysteme, dessen Ursprung im Punkte p liegt. Da nun dieser Punkt auf der Tangente des Hauptschnittes im Punkte p liegen soll, so muss die Gleichung (13) erfüllt werden, wenn man in ihr für α, β, γ setzt dx, dy, dz. Man hat daher die Differentialgleichung:

$$(15) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ dx, & dy, & dz \\ \varphi'(dx), & \varphi'(dy), & \varphi'(dz) \end{vmatrix} = 0$$

als Bedingung für die gesuchte Curve.

Krümmungscurve einer Oberfläche wird diejenige Curve auf der Oberfläche genannt, deren Tangenten sämmtlich Tan-

genten der Hauptschnitte der Oberfläche sind. Ist demnach $u = 0$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche, so ist die Gleichung (15) in Verbindung mit der Gleichung der gegebenen Oberfläche die Differentialgleichung der Krümmungscurve auf ihr.

Man erhält die Gleichung einer Oberfläche, welche die gegebene Oberfläche in ihrer Krümmungscurve schneidet, wenn man die Differentialgleichung der Krümmungscurve mit Benutzung der Gleichung der gegebenen Oberfläche integrirt. Da die Integralgleichung aber eine willkürliche Constante mit sich führt, so giebt es unendlich viele Krümmungscurven einer gegebenen Oberfläche.

Die Differentialgleichung (15) der Krümmungscurve ist zwar von der ersten Ordnung, jedoch von dem zweiten Grade. Deshalb hat man zwei Systeme Krümmungscurven auf einer gegebenen Oberfläche, deren Hauptcharakter aus ihrer Construction durch die Tangenten der Hauptschnitte erkennbar ist. Denn, betrachten wir die beiden Krümmungscurven, welche durch einen beliebig auf der gegebenen Oberfläche gewählten Punkt gehen, so ist die Tangente der einen Krümmungscurve die Tangente des einen Hauptschnittes, und die Tangente der anderen Krümmungscurve ist die Tangente des anderen Hauptschnittes. Da diese Tangenten aber auf einander senkrecht stehen, so haben wir den Satz:

Die Krümmungscurven einer Oberfläche sind zweifacher Art. Die einen schneiden die anderen senkrecht.

Deshalb wird eine Oberfläche in ihrer ganzen Ausdehnung durch die stetige Aufeinanderfolge der beiden Arten Krümmungscurven auf ihr in unendlich kleine Rechtecke zertheilt.

Wenn die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung ist, so lässt sich die Integration der Differentialgleichung ihrer Krümmungscurven wirklich durchführen. Wir werden im Folgenden diese Integration ausführen, um die, in der zweiundzwanzigsten Vorlesung gegebene Definition der Krümmungscurven auf Oberflächen zweiter Ordnung mit der allgemeinen auf Oberflächen in Uebereinstimmung zu bringen.

Vertauschen wir in dieser Absicht die Buchstaben x, y, z mit den Buchstaben β_0, β_1, β_2, und nehmen an, dass die gegebene Oberfläche $u = 0$ ein Ellipsoid sei:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_0} - 1 = 0,$$

so wird die durch 4 dividirte Differentialgleichung (15) der Krümmungscurven auf dem Ellipsoid:

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \\ d\beta_0, & d\beta_1, & d\beta_2 \\ \frac{d\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{d\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{d\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung, welche nach (45) der zweiundzwanzigsten Vorlesung, durch elliptische Coordinaten ausgedrückt, übergeht in:

$$Q\left\{(\lambda_1 - \lambda_2)B_0^2 d\lambda_1 d\lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_0)B_1^2 d\lambda_2 d\lambda_0 + (\lambda_0 - \lambda_1)B_2^2 d\lambda_0 d\lambda_1\right\} = 0.$$

Da nun λ_0 eine gegebene, constante Grösse ist, so ist $d\lambda_0 = 0$, und die zuletzt angegebene Differentialgleichung reducirt sich auf:

(16) . . . . $d\lambda_1 d\lambda_2 = 0,$

welche Gleichung integrirt giebt:

$$\lambda_1 = C_1 \text{ oder } \lambda_2 = C_2.$$

Dieses sind aber die Gleichungen der, mit dem gegebenen Ellipsoid confocalen Oberflächen zweiter Ordnung, welche das Ellipsoid nach der erweiterten Definition der Krümmungscurven auf Oberflächen in den Krümmungscurven schneiden. In gleicher Weise führt die Differentialgleichung der Krümmungscurven auf einem der beiden Hyperboloide, ausgedrückt durch elliptische Coordinaten und integrirt, auf die mit ihnen confocalen Oberflächen. Wir können daher mit Recht die Krümmungscurven auf Oberflächen zweiter Ordnung, wie in der zweiundzwanzigsten Vorlesung geschehen ist, als die Schnittcurven confocaler Oberflächen zweiter Ordnung erklären.

Monge nennt Krümmungscurven auf einer gegebenen Oberfläche die stetige Aufeinanderfolge von Punkten, für welche

die unendlich nahen Normalen der Oberfläche sich schneiden. Wir werden durch den Calcul nachweisen, dass diese Art Curven mit den, in dem Vorhergehenden definirten Krümmungscurven zusammenfallen.

Wenn wir mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes p auf der gegebenen Oberfläche $u = 0$ bezeichnen, so haben wir die Gleichungen der Normale in diesem Punkte:

$$(17) \quad \begin{aligned} x - a &= \mu u_0, \\ y - b &= \mu u_1, \\ z - c &= \mu u_2. \end{aligned}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen für x, y, z die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ eines, dem Punkte p unendlich nahe liegenden Punktes q der Oberfläche, so werden die Gleichungen der Normale in dem Punkte q:

$$(18) \quad \begin{aligned} x + dx - a &= \nu(u_0 + du_0), \\ y + dy - b &= \nu(u_1 + du_1), \\ z + dz - c &= \nu(u_2 + du_2), \end{aligned}$$

wenn wir annehmen, dass durch jene Substitution μ in ν übergehe.

Sollen sich diese beiden Normalen schneiden, so müssen gewisse Werthe von a, b, c den beiden Systemen Gleichungen zu gleicher Zeit genügen. Zieht man daher unter der Voraussetzung, dass a, b, c diese Werthe haben, das erste System Gleichungen von dem zweiten ab, so erhält man die Bedingungsgleichungen für den Punkt q:

$$\begin{aligned} dx + (\mu - \nu) u_0 - \nu du_0 &= 0, \\ dy + (\mu - \nu) u_1 - \nu du_1 &= 0, \\ dz + (\mu - \nu) u_2 - \nu du_2 &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen durch Elimination der Unbekannten $(\mu - \nu)$ und $-\nu$ die Differentialgleichung der Curven von Monge hervorgeht:

$$(19) \quad \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ dx, & dy, & dz \\ du_0, & du_1, & du_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bemerkt man aber, dass, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von dx, dy, dz, ist:

$$(20) \ldots \quad \begin{aligned} du_0 &= u_{00}dx + u_{01}dy + u_{02}dz = \tfrac{1}{2}\varphi'(dx), \\ du_1 &= u_{10}dx + u_{11}dy + u_{12}dz = \tfrac{1}{2}\varphi'(dy), \\ du_2 &= u_{20}dx + u_{21}dy + u_{22}dz = \tfrac{1}{2}\varphi'(dz), \end{aligned}$$

so sieht man, dass die Differentialgleichung (15) der Krümmungscurven mit der Differentialgleichung (19) der Curven von Monge vollkommen übereinstimmt.

Einunddreissigste Vorlesung.

Das Theorem von Dupin.

In der vorhergehenden Vorlesung haben wir durch den Calcul nachgewiesen, dass sich die drei Systeme confocaler Oberflächen zweiter Ordnung in ihren Krümmungscurven schneiden. Diese drei Systeme Oberflächen zweiter Ordnung schneiden sich senkrecht. Die Erörterung der Frage, ob diese drei Systeme Oberflächen zweiter Ordnung sich darum in ihren Krümmungscurven schneiden, weil sie sich senkrecht schneiden, und die Erweiterung der Frage auf allgemeine Oberflächen führt auf das Theorem von Dupin:

Wenn drei Systeme Oberflächen so beschaffen sind, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Oberfläche aus jedem der drei Systeme hindurchgeht, und wenn sich jene drei, durch den beliebigen Punkt des Raumes gelegten Oberflächen immer senkrecht schneiden, so schneiden sich die drei Systeme Oberflächen gegenseitig in ihren Krümmungscurven.

Aus diesem Theoreme folgt dann ohne Weiteres, dass die drei Systeme confocaler Oberflächen zweiter Ordnung sich gegenseitig in ihren Krümmungscurven schneiden, weil sie sich senkrecht schneiden.

Wir werden die Bedingungen des Theoremes analytisch feststellen, hierauf aus den Bedingungen weitere Folgerungen ziehen und letztere dazu benutzen, um das Theorem selbst zu beweisen.

Ein System Oberflächen ist im Allgemeinen durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes und einer willkürlichen Constante gegeben. Diese Gleichung können wir uns nach der willkürlichen Constante aufgelöst denken, und demnach annehmen, dass die drei Systeme Oberflächen durch ihre Gleichungen in der aufgelösten Form gegeben seien:

$$(1) \ldots\ldots \quad u = \lambda^0, \quad v = \lambda', \quad w = \lambda'',$$

indem wir unter u, v, w irgend welche Functionen der Coordinaten x, y, z verstehen und unter $\lambda^0, \lambda', \lambda''$ willkürliche Constanten.

In dieser Voraussetzung sind die Bedingungen des Theoremes:

$$(2) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 &= 0, \\ w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 &= 0, \\ u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 &= 0, \end{aligned}$$

wenn wir mit $u_0, u_1, u_2 \ldots$ die partiellen Differentialquotienten der Functionen $u \ldots$ nach den Variabeln x, y, z bezeichnen.

Es sind diese Gleichungen identische Gleichungen, weil sie ausdrücken, dass die Normalen der drei, durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehenden Oberflächen in diesem Punkte auf einander senkrecht stehen. Man kann daher jede von diesen Gleichungen partiell nach einer der Variabeln differentiiren, wodurch man wieder identische Gleichungen erhält.

Aus der ersten von diesen Gleichungen geht, wenn man mit $u_{\varkappa\lambda}, v_{\varkappa\lambda}, w_{\varkappa\lambda}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten der Functionen u, v, w bezeichnet, folgendes System hervor:

$$\begin{aligned} (v_{00} w_0 + v_{10} w_1 + v_{20} w_2) + (w_{00} v_0 + w_{10} v_1 + w_{20} v_2) &= 0, \\ (v_{01} w_0 + v_{11} w_1 + v_{21} w_2) + (w_{01} v_0 + w_{11} v_1 + w_{21} v_2) &= 0, \\ (v_{02} w_0 + v_{12} w_1 + v_{22} w_2) + (w_{02} v_0 + w_{12} v_1 + w_{22} v_2) &= 0. \end{aligned}$$

Zwei andere Systeme Gleichungen erhält man auf gleiche Weise durch Differentiation der zweiten und dritten Gleichung (2).

Um diese drei Systeme identischer Gleichungen in einer übersichtlichen Form darzustellen, führen wir nach der Analogie von (21) der neunundzwanzigsten Vorlesung die Bezeichnungen ein:

$$(3)\quad \begin{aligned} \varphi(a_0, a_1, a_2) &= u_{00}a_0^2 + u_{11}a_1^2 + u_{22}a_2^2 + 2u_{12}a_1a_2 + 2u_{20}a_2a_0 + 2u_{01}a_0a_1, \\ \psi(a_0, a_1, a_2) &= v_{00}a_0^2 + v_{11}a_1^2 + v_{22}a_2^2 + 2v_{12}a_1a_2 + 2v_{20}a_2a_0 + 2v_{01}a_0a_1, \\ \chi(a_0, a_1, a_2) &= w_{00}a_0^2 + w_{11}a_1^2 + w_{22}a_2^2 + 2w_{12}a_1a_2 + 2w_{20}a_2a_0 + 2w_{01}a_0a_1, \end{aligned}$$

mit deren Hülfe wir jene drei Systeme identischer Gleichungen, nach Multiplication mit dem Factor 2, also darstellen:

$$(4) \quad \begin{aligned} \psi'(w_0) + \chi'(v_0) &= 0, \\ \psi'(w_1) + \chi'(v_1) &= 0, \\ \psi'(w_2) + \chi'(v_2) &= 0, \\[4pt] \chi'(u_0) + \varphi'(w_0) &= 0, \\ \chi'(u_1) + \varphi'(w_1) &= 0, \\ \chi'(u_2) + \varphi'(w_2) &= 0, \\[4pt] \varphi'(v_0) + \psi'(u_0) &= 0, \\ \varphi'(v_1) + \psi'(u_1) &= 0, \\ \varphi'(v_2) + \psi'(u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Wir führen ferner, um abzukürzen, die Bezeichnungen ein:

$$(5) \quad \begin{aligned} \Phi(v, w) &= v_0\varphi'(w_0) + v_1\varphi'(w_1) + v_2\varphi'(w_2), \\ \Psi(w, u) &= w_0\psi'(u_0) + w_1\psi'(u_1) + w_2\psi'(u_2), \\ X(u, v) &= u_0\chi'(v_0) + u_1\chi'(v_1) + u_2\chi'(v_2), \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass:

$$(6) \quad \Phi(v, w) = \Phi(w, v), \ \Psi(w, u) = \Psi(u, w), \ X(u, v) = X(v, u).$$

Aus den Gleichungen (4) setzen wir nun folgende zusammen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Psi(w, u) + X(v, u) &= 0, \\ X(u, v) + \Phi(w, v) &= 0, \\ \Phi(v, w) + \Psi(u, w) &= 0. \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen erhält man nämlich, wenn man die drei Gleichungen des ersten Systemes (4) der Reihe nach mit u_0, u_1, u_2 multiplicirt und addirt und so weiter.

Addirt man zwei von diesen Gleichungen und zieht die dritte ab, so erhält man:

$$(8) \ldots \quad \Phi(v, w) = 0, \quad \Psi(w, u) = 0, \quad X(u, v) = 0.$$

Diese drei Gleichungen zugleich mit den drei Bedingungsgleichungen (2) des oben angegebenen Theoremes werden nun dazu dienen, das Theorem zu beweissen.

Den Beweis des Theoremes werden wir in der Weise führen, dass wir zeigen, wie die Gleichungen:

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad u = \lambda^0, \quad v = \lambda',$$

welche den Gleichungen (2) und deshalb den Gleichungen (8) genügen, auch der Differentialgleichung (15) in der vorhergehenden Vorlesung der Krümmungscurve der ersten Oberfläche $u = \lambda^0$ genügen.

Wenn wir demnach mit K den Ausdruck bezeichnen:

$$(10) \ldots\ldots \quad K = \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ dx, & dy, & dz \\ \varphi'(dx), & \varphi'(dy), & \varphi'(dz) \end{vmatrix},$$

der entwickelt die Gestalt annimmt:

$$(11) \quad K = (u_1 dz - u_2 dy)\,\varphi'(dx) + (u_2 dx - u_0 dz)\,\varphi'(dy) + (u_0 dy - u_1 dx)\,\varphi'(dz),$$

so werden wir nachzuweisen haben, dass unter Voraussetzung der angeführten Gleichungen (9), (2) und (8) dieser Ausdruck K verschwindet.

Differentiiren wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (9), so erhalten wir:

$$u_0 dx + u_1 dy + u_2 dz = 0,$$
$$v_0 dx + v_1 dy + v_2 dz = 0,$$

zwei Gleichungen, welche, mit den beiden ersten Gleichungen (2):

$$u_0 w_0 + u_1 w_1 + u_2 w_2 = 0,$$
$$v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$

verglichen, beweisen, dass $dx : dy : dz = w_0 : w_1 : w_2$, oder dass:

$$dx = \lambda w_0, \quad dy = \lambda w_1, \quad dz = \lambda w_2.$$

Setzen wir diese Werthe in den Ausdruck (11), so erhalten wir:

$$\frac{K}{\lambda^2} = (u_1 w_2 - u_2 w_1)\varphi'(w_0) + (u_2 w_0 - u_0 w_2)\varphi'(w_1) + (u_0 w_1 - u_1 w_0)\varphi'(w_2).$$

Bestimmen wir endlich die Verhältnisse von $v_0 : v_1 : v_2$ aus der ersten und letzten Gleichung (2) oder, mit Einführung eines unbestimmten Factors μ, jene Grössen selbst:

$$u_1 w_2 - u_2 w_1 = \mu v_0, \quad u_2 w_0 - u_0 w_2 = \mu v_1, \quad u_0 w_1 - u_1 w_0 = \mu w_2,$$

und setzen diese Werthe in den zuletzt gegebenen Ausdruck für $\frac{K}{\lambda^2}$ ein, so wird auf Grund der Bezeichnungen (5):

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad K = \mu\lambda^2 \Phi(v, w).$$

Da aber nach (8) $\Phi(v, w)$ verschwindet, so verschwindet auch K.

Wir geben schliesslich noch einen zweiten Beweis des Dupin'schen Theoremes, gestützt auf Coordinatentransformation.

Wir gehen wieder von den drei Systemen Oberflächen (1) aus, welche den Bedingungen (2) des Theoremes genügen, woraus die Gleichungen (8) eine unmittelbare Folge sind. Wir betrachten aber in den Gleichungen (1) die willkürlichen Constanten λ^0, λ', λ'' als die Coordinaten desjenigen Punktes im Raume, dem die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die Gleichungen (1) entsprechen, und stellen den Ausdruck (10) K, der, gleich 0 gesetzt, die Differentialgleichung der Krümmungscurve der gegebenen Oberfläche $u = \lambda^0$ ist, als eine Function der Coordinaten λ^0, λ', λ'' und ihrer Differentialen $d\lambda^0$, $d\lambda'$, $d\lambda''$ dar. Wenn wir diesen so transformirten Ausdruck K gleich 0 setzen, so erhalten wir die Differentialgleichung der Krümmungscurven auf der gegebenen Oberfläche in einer integrir-

baren Form, und können daraus die Gleichungen der Oberflächen selbst ableiten, welche die gegebene Oberfläche in ihren Krümmungscurven schneiden. Es wird sich dann zeigen, dass die hergeleiteten Oberflächen gerade diejenigen sind, die durch die Gleichungen $v = \lambda'$ und $w = \lambda''$ mit den willkürlichen Constanten λ' und λ'' analytisch ausgedrückt werden.

Die drei Gleichungen (1) geben, nach den rechtwinkligen Coordinaten aufgelöset, die Werthe derselben als Functionen von λ^0, λ', λ''. Differentiiren wir diese Gleichungen, um auch die Differentialen der rechtwinkligen Coordinaten auszudrücken, so erhalten wir:

$$(13) \quad \begin{aligned} u_0 dx + u_1 dy + u_2 dz &= d\lambda^0, \\ v_0 dx + v_1 dy + v_2 dz &= d\lambda', \\ w_0 dx + w_1 dy + w_2 dz &= d\lambda'', \end{aligned}$$

Dieses System von linearen Gleichungen haben wir nach dx, dy, dz aufzulösen. Wir behaupten, dass die aufgelösten Gleichungen folgende sind:

$$(14) \quad \begin{aligned} dx &= u_0 \frac{d\lambda^0}{U} + v_0 \frac{d\lambda'}{V} + w_0 \frac{d\lambda''}{W}, \\ dy &= u_1 \frac{d\lambda^0}{U} + v_1 \frac{d\lambda'}{V} + w_1 \frac{d\lambda''}{W}, \\ dz &= u_2 \frac{d\lambda^0}{U} + v_2 \frac{d\lambda'}{V} + w_2 \frac{d\lambda''}{W}, \end{aligned}$$

wenn wir, um abzukürzen, setzen:

$$(15) \quad \begin{aligned} U &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2, \\ V &= v_0^2 + v_1^2 + v_2^2, \\ W &= w_0^2 + w_1^2 + w_2^2. \end{aligned}$$

Denn setzt man die Werthe von dx, dy, dz aus (14) in (13) ein, und vergleicht auf beiden Seiten der Gleichungen die Coefficienten von $d\lambda^0$, $d\lambda'$, $d\lambda''$, so erhält man neun Bedingungsgleichungen, von welchen drei von selber erfüllt werden, während die sechs anderen mit den Gleichungen (2) übereinstimmen.

Um nun die Determinante (10) K mit Hülfe von (14) leichter zu transformiren, bilden wir die Determinante D:

$$(16) \; \ldots\ldots\ldots \quad D = \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ v_0, & v_1, & v_2 \\ w_0, & w_1, & w_2 \end{vmatrix},$$

und stellen das Product KD beider Determinanten als eine Determinante dar, welche mit Rücksicht auf (15), (13) und (2) die Gestalt erhält:

$$KD = \begin{vmatrix} U, & 0, & 0, \\ d\lambda^0, & d\lambda', & d\lambda'', \\ dx\,\varphi'(u_0) + dy\,\varphi'(u_1) + dz\,\varphi'(u_2), & dx\,\varphi'(v_0) + dy\,\varphi'(v_1) + dz\,\varphi'(v_2), & dx\,\varphi'(w_0) + dy\,\varphi'(w_1) + dz\,\varphi'(w_2) \end{vmatrix},$$

oder kürzer:

$$(17) \quad U \begin{vmatrix} d\lambda', & d\lambda'' \\ dx\varphi'(v_0) + dy\varphi'(v_1) + dz\varphi'(v_2), & dx\varphi'(w_0) + dy\varphi'(w_1) + dz\varphi'(w_2) \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir, um dieses Product weiter zu vereinfachen, die Gleichungen (14) der Reihe nach mit $\varphi'(v_0)$, $\varphi'(v_1)$, $\varphi'(v_2)$, oder mit $\varphi'(w_0)$, $\varphi'(w_1)$, $\varphi'(w_2)$, und addiren, so erhalten wir auf Grund der Gleichungen (8) und mit Rücksicht auf die Bezeichnungen (5):

$$dx\,\varphi'(v_0) + dy\,\varphi'(v_1) + dz\,\varphi'(v_2) = \frac{\Phi(v, v)}{V}\,d\lambda' + \frac{\Phi(u, v)}{U}\,d\lambda^0,$$

$$dx\,\varphi'(w_0) + dy\,\varphi'(w_1) + dz\,\varphi'(w_2) = \frac{\Phi(w, w)}{W}\,d\lambda'' + \frac{\Phi(u, w)}{U}\,d\lambda^0,$$

wodurch der Ausdruck (17) übergeht in:

$$KD = U \begin{vmatrix} d\lambda', & d\lambda'' \\ \frac{\Phi(v, v)}{V}\,d\lambda' + \frac{\Phi(u, v)}{U}\,d\lambda^0, & \frac{\Phi(w, w)}{W}\,d\lambda'' + \frac{\Phi(u, w)}{U}\,d\lambda^0 \end{vmatrix},$$

der:

$$(18) \quad KD = U\left\{\frac{\Phi(w,w)}{W} - \frac{\Phi(v,v)}{V}\right\} d\lambda'\,d\lambda'' + \left\{\Phi(u,w)\,d\lambda' - \Phi(u,v)\,d\lambda''\right\} d\lambda^0.$$

Hiernach geht die Differentialgleichung $K = 0$ der Krümmungscurven der Oberfläche $u = \lambda^0$, für welche λ^0 eine Constante ist, über in:

$$(19) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\lambda'\,d\lambda'' = 0,$$

welche Gleichung integrirt giebt λ' oder λ'' gleich einer willkürlichen Constanten.

Anhang.

Planeten-Bewegung.

Unter Planeten-Bewegung verstehen wir die Bewegung eines materiellen freien Punktes, des Planeten, um einen festen Punkt, die Sonne, welche den freien Punkt nach dem Newton'schen Gesetze anzieht. Diese Bewegung auf Grund der in der analytischen Mechanik entwickelten Principien festzustellen, soll unsere Aufgabe sein.

Die Auflösung der Aufgabe erklärt allerdings nicht den wirklichen Vorgang in der Natur. Denn die Sonne liegt in dem Weltenraume eben so wenig fest, als irgend ein Planet. Wir werden darum zum Schlusse unserer Vorlesung zeigen, wie das Problem zweier Körper auf die vorgelegte Aufgabe, als eine Fundamentalaufgabe, zurückgeführt werden kann.

Unsere Aufgabe verlangt die Bestimmung der Coordinaten x, y, z des Planeten und demnächst der Entfernung des Planeten von der Sonne, des Radiusvector r, als Functionen der Zeit t. Diese Bestimmung soll in dem Folgenden gemacht werden durch Aufstellung von vier Gleichungen zwischen den fünf Variabeln x, y, z, r, t. Ihre Auflösungen nach den vier ersten Variabeln geben dann dieselben als Functionen der Zeit.

Wenn zur Lösung unserer Aufgabe nichts weiter gegeben ist, als die Lage der Sonne in dem Anfangspunkte der Coordinaten und das Newton'sche Gesetz der Anziehung, so sieht man, dass die Aufgabe keineswegs eine ganz bestimmte ist, dass sie vielmehr willkürliche Annahmen zulässt, welchen wir vorerst nachgehen wollen.

Betrachten wir nun zu diesem Zwecke den Zustand des Planeten in seiner Bewegung zu einer bestimmten Zeit, die wir bezeichnen wollen mit $t = 0$. Dieser sogenannte Anfangszustand hängt ab: erstens von den drei Coordinaten des Planeten, also von drei Constanten, zweitens von der Richtung der Tangente seiner Bahn, welche analytisch sich durch zwei Constanten bestimmen lässt, drittens von der Grösse der Geschwindigkeit, ausgedrückt durch eine Constante.

Wie sich eine oder mehrere dieser sechs Constanten ändern, wird auch die Bewegung des Planeten eine andere. Die vollständige Lösung unserer Aufgabe muss darum sechs willkürliche Constanten enthalten.

Die analytische Mechanik ist seit D'Alembert in der glücklichen Lage, die Gleichungen sogleich hinschreiben zu können, welche ein gegebenes Problem der Mechanik lösen. Die D'Alembert'schen Gleichungen sind allerdings nicht Gleichungen, welche das Problem unmittelbar lösen, sondern es sind Differentialgleichungen, welche Nebenumstände unberücksichtigt lassen und darum gleich ganze Klassen von Aufgaben zusammenfassen.

In dem vorliegenden Falle ist es der Anfangszustand des Planeten, auf welchen die D'Alembert'schen Gleichungen keine Rücksicht nehmen. Es ist daher vorauszusehen, dass die D'Alembert'schen Differentialgleichungen sechs Integrationen erfordern, durch welche die oben genannten sechs Constanten eingeführt werden.

Indem wir die Kenntniss des D'Alembert'schen Principes voraussetzen, schreiben wir die Differentialgleichungen hin, welche unsere Aufgabe lösen:

$$(1) \ldots \quad x'' = -\frac{\varkappa^2 x}{r^3}, \quad y'' = -\frac{\varkappa^2 y}{r^3}, \quad z'' = -\frac{\varkappa^2 z}{r^3}, \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

In ihnen bedeuten x, y, z die Coordinaten des Planeten, r seine Entfernung von der, im Anfangspunkte der Coordinaten liegenden Sonne und die mit Strichen versehenen Coordinaten die Differentialquotienten derselben nach der Zeit t genommen; $\varkappa^2$ ist die Anziehung, die die Sonne gegen den Planeten in der Einheit der Entfernung ausübt.

Die Differentialgleichungen (1) verlangen in der That sechs Integrationen, wie man unmittelbar sieht, wenn man $\varkappa^2 = 0$ setzt; aber sie verlangen auch nicht mehr als sechs Integrationen. Denn durch fortgesetzte Differentiation und Elimination lässt sich eine Differentialgleichung der sechsten Ordnung ableiten zwischen einer Coordinate und der Zeit.

Es bedarf keiner Integration der aufgeführten Differentialgleichungen, um sogleich eine Eigenschaft der Bahn des Planeten zu erkennen. Betrachten wir zu diesem Zwecke drei auf einander folgende, unendlich nahe Stellungen des Planeten, die gegeben sind durch die Coordinaten:

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z, \\ x + x'dt, & y + y'dt, & z + z'dt, \\ x + 2x'dt + x''dt^2, & y + 2y'dt + y''dt^2, & z + 2z'dt + z''dt^2, \end{array}$$

so wird, wenn wir mit D die Determinante bezeichnen:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix},$$

der Ausdruck Ddt^3 den sechsfachen Inhalt der dreiseitigen Pyramide bezeichnen, deren Ecken durch die drei Stellungen des Planeten und den Stand der Sonne im Anfangspunkte der Coordinaten bestimmt sind.

Die Determinante D verschwindet, wenn wir für x'', y'', z'' die Werthe aus (1) setzen. Aus diesem Umstande schliessen wir, dass die Ecken der genannten dreiseitigen Pyramide in einer und derselben Ebene liegen. Da diese, durch die Sonne gehende Ebene schon durch zwei, unendlich nahe Stellungen des Planeten bestimmt ist, und die dritte, unendlich nahe in ihr liegt, so wird, wenn wir von den beiden letzten Stellungen des Planeten ausgehen, die darauf folgende sich wieder nicht von der Ebene entfernen und so ferner. Wir drücken dieses kurz so aus:

Die Bewegung des Planeten geschieht in einer durch die Sonne gehenden, ganz bestimmten Ebene.

Wenn wir demnach mit X, Y, Z die Coordinaten eines variabeln Punktes bezeichnen, so wird:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Ebene sein, in welcher sich der Planet bewegt.

Da die Lage dieser Ebene offenbar abhängt von dem Anfangszustande des Planeten, welcher bei der Aufstellung der Differentialgleichungen (1) unberücksichtigt blieb, so sehen wir, dass es unmöglich ist, die Gleichung der genannten Ebene ohne Integration bloss aus den Differentialgleichungen festzustellen. Wir wollen daher vorerst diejenigen Integrationen der Differentialgleichungen unternehmen, welche zur Feststellung der genannten Ebene erforderlich sind.

Multipliciren wir zu diesem Zwecke die erste Gleichung (1) mit y, und ziehen sie von der mit x multiplicirten, zweiten Gleichung ab, so erhalten wir: $xy'' - x''y = 0$, eine Gleichung, welche integrirt giebt: $xy' - x'y = c_2$. Verfahren wir in gleicher Weise mit je zwei von den drei Differentialgleichungen (1), so ergeben sich daraus folgende Integralgleichungen mit den willkürlichen Constanten c_0, c_1, c_2:

$$(4) \ldots \; yz' - y'z = c_0, \quad zx' - z'x = c_1, \quad xy' - x'y = c_2.$$

Die analytische Mechanik nennt sie die Flächensätze wegen ihrer geometrischen Bedeutung, die wir hier auseinander setzen wollen.

Betrachten wir nämlich das Dreieck $\varDelta$, dessen Ecken gegeben sind durch die zwei ersten, unendlich nahe liegenden Stellungen des Planeten und die Lage der Sonne, so sind die doppelten Inhalte der senkrechten Projectionen des Dreiecks $\varDelta$ auf die Coordinatenebenen die in (4) mit dt multiplicirten Ausdrücke, nämlich:

$$c_0 dt, \quad c_1 dt, \quad c_2 dt.$$

Bezeichnen wir nun mit $2\varDelta$ den doppelten Inhalt des Dreiecks $\varDelta$, so haben wir:

$$4\varDelta^2 = (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) dt^2;$$

oder, wenn wir mit C eine neue Constante einführen durch die Gleichung:

$$(5) \ldots\ldots\ldots \; C^2 = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2,$$

so wird:

$$(6) \quad 2\Delta = C\,dt.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass das von dem Radiusvector in einem unendlich kleinen Zeitraume beschriebene Dreieck der Zeit proportional ist. Da die Summe dieser Dreiecke für einen endlichen Zeitraum die von dem Radiusvector beschriebene Fläche ausmachen, so ergiebt sich hieraus das erste Kepler'sche Gesetz:

Die von dem Radiusvector beschriebenen Flächenräume sind proportional den Zeiten, in welchen sie beschrieben werden.

Die Flächensätze dienen zur Bestimmung der Ebene, in welcher sich der Planet bewegt. Denn entwickelt man die Gleichung (3) dieser Ebene, so werden die Coefficienten der variabeln Coordinaten gerade die Ausdrücke (4) und demnach die Gleichung der gesuchten Ebene:

$$(7) \quad c_0 X + c_1 Y + c_2 Z = 0.$$

Da der Planet in dieser Ebene liegt, so haben wir die Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} c_0 x + c_1 y + c_2 z &= 0, \\ c_0 x' + c_1 y' + c_2 z' &= 0, \end{aligned}$$

welche man auch erhält, wenn man die Gleichungen (4) mit x, y, z oder x', y', z' multiplicirt und addirt.

Um ein viertes Integral der Differentialgleichungen (1) zu erhalten, multipliciren wir die drei ersten Gleichungen respective mit x', y', z' und addiren. Das Integral der so componirten Gleichung ist dann folgendes:

$$(9) \quad \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{\varkappa^2}{r} + h.$$

Der linke Theil dieser Gleichung wird in der analytischen Mechanik die halbe lebendige Kraft genannt. Er bedeutet hier das durch 2 dividirte Quadrat der Geschwindigkeit des Planeten. Die Gleichung selbst sagt aus, dass in dem Ver-

laufe der Bewegung des Planeten die lebendige Kraft oder die Geschwindigkeit des Planeten in zwei Zeitpunkten dieselben sein werden, wenn die diesen entsprechenden Radiivectoren gleich sind.

Es ist ein bekannter Determinantensatz:

$$(10)\quad (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2$$
$$=(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2,$$

den man aus der Gleichung $DD = DD$ erhält, wenn man den linken Theil dieser Gleichung, das Product zweier Determinanten (2), als eine Determinante darstellt, diese partiell nach dem Elemente $x''x''+y''y''+z''z''$ differentiirt und den dadurch erhaltenen Differentialquotient nach (43) der siebenten Vorlesung ausdrückt durch die partiellen Differentialquotienten der Factoren des rechten Theiles der Gleichung.

Quadrirt man nun die letzte Gleichung (1) und differentiirt dieselbe, so erhält man:

$$(11)\quad \ldots\ldots\ldots \quad rr' = xx' + yy' + zz'.$$

Benutzt man diese Gleichung zugleich mit der Gleichung, woraus sie entstanden ist, mit Zuziehung der Flächensätze (4), so giebt die Determinantengleichung (10) folgenden Ausdruck für die lebendige Kraft:

$$(12)\quad \ldots\ldots \quad x'^2+y'^2+z'^2 = r'^2 + \frac{C^2}{r^2}.$$

Eliminirt man endlich die lebendige Kraft aus (9) und (12), so erhält man:

$$(13)\quad \ldots\ldots\ldots \quad r'^2 = 2h + \frac{2\varkappa^2}{r} - \frac{C^2}{r^2},$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, aus welcher man durch Integration erhält:

$$(14)\quad \ldots\ldots \quad t+\tau = \int \frac{dr}{\sqrt{\left(2h+\frac{2\varkappa^2}{r}-\frac{C^2}{r^2}\right)}}.$$

Von den am Anfange unserer Untersuchung angekündigten sechs Integrationen sind bis dahin fünf Integrationen

vollführt. Es bleibt noch eine Integration zu machen übrig. Die weiteren Principien der Mechanik vor Jacobi geben keine allgemeinen Regeln an, nach welchen, wie die vorhergehenden, so das letzte Integral unseres Systemes Differentialgleichungen gefunden werden kann. Da wir jedoch an dieser Stelle keinen Gebrauch machen wollen von dem Principe der letzten Integration von Jacobi, weil es sich nicht so kurz darstellen lässt, so bleibt uns nichts übrig, als zu untersuchen, ob nicht vielleicht eines von den schon angewendeten Principien der Mechanik, zur Integration der Differentialgleichungen nochmals angewendet, uns auf das letzte Integral führt. Wir kehren zu diesem Zwecke zu den Differentialgleichungen (1) zurück, von welchen wir ausgegangen sind.

Die Differentialgleichungen (1) sind zu symmetrisch, als dass wir die Symmetrie durch Einführung neuer Variabeln zerstören möchten. Die vierte Gleichung (1) ist keine Differentialgleichung und darum in keiner Weise symmetrisch mit den übrigen Gleichungen. Eine gewisse Symmetrie zwischen den vier Gleichungen (1) wird eben erreicht, wenn wir an Stelle der vierten Gleichung, als Definition des Radiusvector r auch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung einführen.

Differentiiren wir zu diesem Zwecke die Gleichung (13), so erhalten wir:

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r'' = -\frac{\varkappa^2}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}.$$

Die Interpretation dieser Differentialgleichung giebt den Satz:

W e n n m a n a u f d e m R a d i u s v e c t o r e i n e s P l a n e t e n l e b t e, o h n e e i n e V o r s t e l l u n g v o n d e r B e w e g u n g d e s R a d i u s v e c t o r u m d i e S o n n e z u h a b e n, s o k ö n n t e m a n d i e B e w e g u n g d e s P l a n e t e n a u f d e m R a d i u s v e c t o r n i c h t d u r c h d a s N e w t o n'sche G e s e t z, d a s s d i e A n z i e h u n g g e s c h ä h e u m g e k e h r t d e m Q u a d r a t e d e r E n t f e r n u n g d e s P l a n e t e n v o n d e r S o n n e, e r k l ä r e n; e s m ü s s t e n o c h d i e u m g e k e h r t e d r i t t e P o t e n z d e r E n t f e r n u n g z u H ü l f e z u g e n o m m e n w e r d e n.

Wenn wir nun an Stelle der vierten Gleichung (1) die Differentialgleichung (15) einführen, so zeigt es sich, dass der Flächensatz der Mechanik sich an je zwei von den vier Differentialgleichungen anlegen lässt. Denn multipliciren wir die erste Gleichung (1) mit r, die Gleichung (15) mit x, und ziehen letztere von der ersten ab, so erhalten wir:

$$rx'' - r''x = -\frac{C^2}{r^3}x,$$

und mit Rücksicht auf die erste Gleichung (1):

$$rx'' - r''x = \frac{C^2}{\varkappa^2}x''.$$

Integrirt giebt diese Gleichung:

$$rx' - r'x = \frac{C^2}{\varkappa^2}x' + b_0.$$

Auf diese Weise sehen wir an Stelle der gesuchten letzten Integralgleichung drei Integralgleichungen mit den willkürlichen Constanten b_0, b_1, b_2 hervorgehen:

$$(16) \quad \begin{aligned} rx' - r'x &= \frac{C^2}{\varkappa^2}x' + b_0, \\ ry' - r'y &= \frac{C^2}{\varkappa^2}y' + b_1, \\ rz' - r'z &= \frac{C^2}{\varkappa^2}z' + b_2. \end{aligned}$$

Im Grunde brauchen wir nur eine von diesen Integralgleichungen, um die Lösuug unseres Problemes zu vollenden. Wenn aber, wie in dem vorliegenden Falle, die Natur so freigebig ist, so kann man versichert sein, dass ihre Gaben für die Lösung des Problemes von besonderem Werth sind. Und in der That wird es sich zeigen, dass die Constanten b_0, b_1, b_2 der Integration einer sehr einfachen und für das Problem nutzbaren, geometrischen Interpretation fähig sind. Wir werden darum keines von den 8 gefundenen Integralen (4), (9), (14), (16) unbeachtet lassen.

Da wir in dem Vorhergehenden an Stelle der sechs willkürlichen Constanten der Integration acht willkürliche Constanten c_0, c_1, c_2, h, τ, b_0, b_1, b_2 eingeführt haben, so müssen

letztere zweien Bedingungsgleichungen genügen. Diese Bedingungsgleichungen aufzusuchen, wird unsere nächste Aufgabe sein.

Multipliciren wir die Gleichungen (16) der Reihe nach mit c_0, c_1, c_2 und addiren, so erhalten wir in Berücksichtigung der Gleichungen (8):

$$(17) \quad b_0 c_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0.$$

Dieses ist eine von den gesuchten Bedingungsgleichungen.

Um die andere Bedingungsgleichung abzuleiten, setzen wir:

$$(18) \quad r - \frac{C^2}{\varkappa^2} = \varrho\,,$$

wodurch die Gleichungen (16) die einfachere Gestalt erhalten:

$$(19) \quad \begin{aligned} \varrho x' - r' x &= b_0\,, \\ \varrho y' - r' y &= b_1\,, \\ \varrho z' - r' z &= b_2\,. \end{aligned}$$

Quadriren wir diese Gleichungen, addiren und setzen, um abzukürzen:

$$(20) \quad B^2 = b_0{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2\,,$$

so erhalten wir:

$$B^2 = \varrho^2(x'^2 + y'^2 + z'^2 - r'^2) + r'^2(\varrho - r)^2,$$

und mit Berücksichtigung von (12) und (18):

$$B^2 = \varrho^2 \frac{C^2}{r^2} + r'^2 \frac{C^4}{\varkappa^4}\,,$$

oder:

$$B^2 - C^2 = C^2 \left(\frac{\varrho^2 - r^2}{r^2} + r'^2 \frac{C^2}{\varkappa^4}\right),$$

und mit Berücksichtigung von (18):

$$B^2 - C^2 = \frac{C^4}{\varkappa^4} \left(- \frac{\varkappa^2(\varrho + r)}{r^2} + r'^2\right).$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von ϱ aus (18) ein, so geht sie über in:

$$B^2 - C^2 = \frac{C^4}{\varkappa^4} \left(- \frac{2\varkappa^2}{r} + \frac{C^2}{r^2} + r'^2\right),$$

und mit Berüchsichtigung von (13) erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad B^2 - C^2 = 2h \frac{C^4}{\varkappa^4} \cdot$$

Denn die Grössen C^2 und B^2 sind die in (5) und (20) angegebenen Ausdrücke der Integrationsconstanten.

Es ist auf diese Weise nachgewiesen, dass die gefundenen acht Integralgleichungen nicht unabhängig von einander sind, sondern dass sie die Stelle von sechs unabhängigen Integralgleichungen vertreten. Giebt man diesen sechs Gleichungen noch die vierte Gleichung (1) und die Gleichung (11) bei, so hat man acht von einander unabhängige Gleichungen. Durch Elimination der vier Grössen r', x', y', z' aus denselben gehen dann die gesuchten vier Gleichungen zwischen den Variabeln r, x, y, z, t hervor.

Um diese Elimination in geschickter Weise auszuführen, ziehen wir von der mit z multiplicirten zweiten Gleichung (19) die mit y multiplicirte dritte Gleichung ab, wodurch wir mit Rücksicht auf (4) erhalten:

$$c_0\varrho - b_2 y + b_1 z = 0,$$

und aus dem Systeme Gleichungen (19) geht folgendes hervor:

$$(22) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} c_0\varrho - b_2 y + b_1 z &= 0, \\ c_1\varrho - b_0 z + b_2 x &= 0, \\ c_2\varrho - b_1 x + b_0 y &= 0. \end{aligned}$$

Wenn man in diese Gleichungen den Werth von ϱ aus (18) und dann den Werth von r aus (1) einsetzt, so stellen sie Oberflächen zweiter Ordnung dar, auf welchen sich der Planet bewegt. Da der Planet sich überdies in der Ebene (7) bewegt, so müssen die drei Oberflächen (22) sich in einer und derselben ebenen Curve schneiden. Wir werden dieses auch direct einsehen.

Multipliciren wir die Gleichungen (22) der Reihe nach mit b_0, b_1, b_2 und addiren, so verschwindet nach (17) die Summe identisch. Es ist dieses ein Beweis, dass jede der drei Oberflächen zweiter Ordnung durch die Schnittcurve der beiden anderen geht.

Multipliciren wir die zweite Gleichung (22) mit c_2 und ziehen die dritte mit c_1 multiplicirte Gleichung ab, so erhalten wir mit Rücksicht auf (17) die Gleichung der Ebene (7).

Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die drei Oberflächen sich in einer Curve schneiden, welche in der Ebene (7) liegt.

Multipliciren wir endlich, um die drei Oberflächen in symmetrischer Weise zu verwenden, die Gleichungen (22) der Reihe nach mit c_0, c_1, c_2 und addiren, so wird mit Rüchsicht auf (5):

$$(23) \; \ldots\ldots \quad \varrho - \frac{1}{C^2}\begin{vmatrix} b_0, & b_1, & b_2 \\ c_0, & c_1, & c_2 \\ x, & y, & z \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, welche von der Ebene:

$$(24) \; \ldots\ldots\ldots \quad c_0 x + c_1 y + c_2 z = 0$$

in der Planetenbahn geschnitten wird. Wir können darum sagen:

Die Planetenbahn ist ein Kegelschnitt in einer Ebene, welche durch die Sonne geht.

Um die Lage des genannten Kegelschnittes zu ermitteln, müssen wir auf den Charakter der Oberfläche zweiter Ordnung (23) näher eingehen.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke die durch C^2 dividirte Determinante in der Gleichung (23) also:

$$(25) \; \ldots\ldots \quad V = \frac{1}{C^2}\begin{vmatrix} b_0, & b_1, & b_2 \\ c_0, & c_1, & c_2 \\ x, & y, & z \end{vmatrix},$$

so stellt sich die Gleichung (23) der Oberfläche zweiter Ordnung kürzer so dar:

$$(26) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varrho - V = 0.$$

Diese Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung ist die Differenz der beiden Gleichungen:

$$(27) \; \ldots\ldots \quad \varrho + \lambda = 0, \quad V + \lambda = 0.$$

Die erste Gleichung stellt um die Sonne concentrische Kugeln dar, die zweite Gleichung ist der analytische Ausdruck für ein System paralleler Ebenen. Die Schnittcurven der concentrischen Kugeln und der parallelen Ebenen sind Kreise, deren Mittelpunkte sämmtlich auf dem, von der Sonne auf eine jener Ebenen gefällten Lothe liegen. Da nun diese Kreise (27) auf der Oberfläche (26) liegen, so können wir sagen: die Oberfläche (26) ist eine Rotationsoberfläche. Die Rotationsaxe ist das genannte Loth.

Wenn nun die Cosinus der Winkel, welche die Rotationsaxe A, die Normale der Ebene $V + \lambda = 0$, mit den Coordinatenaxen bildet, sich verhalten wie $a_0 : a_1 : a_2$, so hat man in Berücksichtigung der entwickelten Ebenengleichung:

$$(28) \quad \begin{aligned} a_0 &= b_1c_2 - b_2c_1 \,, \\ a_1 &= b_2c_0 - b_0c_2 \,, \\ a_2 &= b_0c_1 - b_1c_0 \,. \end{aligned}$$

Da diese Ausdrücke, für x, y, z, in die Gleichung (24) gesetzt, derselben genügen, so schliessen wir daraus: Die Rotationsaxe der Oberfläche (26) liegt in der Ebene (24) der Planetenbahn. Wir können ferner sagen: Die Oberfläche (26) wird erzeugt durch Rotation der Planetenbahn um eine von ihren Axen. Welche Axe der Planetenbahn die Rotationsaxe der Oberfläche (26) sei, können wir hier noch nicht entscheiden.

Führen wir nun eine gerade Linie B ein, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus sich verhalten wie $b_0 : b_1 : b_2$, so haben wir auf Grund von (17) und (28):

$$(29) \quad \begin{aligned} b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 &= 0, \\ c_0a_0 + c_1a_1 + c_2a_2 &= 0, \\ a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen drücken aus, dass das Loth C der Ebene (24) der Planetenbahn, die Rotationsaxe A der Oberfläche (26) und die eben definirte, gerade Linie B auf einander senkrecht stehen. Wir können deshalb sagen: Die Constanten b_0, b_1, b_2 der Integration bestimmen die Richtung der zweiten Axe der Planetenbahn.

Dass die Oberfläche (26) eine Rotationsoberfläche ist, kann man auf folgende Art einsehen.

Setzt man nämlich die Werthe von ϱ und r aus (18) und (1) in die Gleichung (26) der Oberfläche und quadrirt, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$x^2 + y^2 + z^2 - B^2 = 0,$$

indem B einen linearen Ausdruck der Punktcoordinaten darstellt. Drückt man nach bekannter Regel die Punktcoordinaten durch Ebenencoordinaten aus, so kann man ohne Rechnung einsehen, dass die Gleichung derselben Oberfläche die Gestalt annimmt:

$$u^2 + v^2 + w^2 - A = 0,$$

indem A einen linearen Ausdruck in Ebenencoordinaten bezeichnet. Dieses ist aber nach (21) der vierundzwanzigsten Vorlesung die allgemeine Form der Gleichungen von Rotationsoberflächen zweiter Ordnung, die einen Brennpunkt im Coordinatenanfangspunkte haben. Der andere, auf der Rotationsaxe gelegene Brennpunkt ist ebenfalls reell, weil die Brennpunkte paarweise nur reell oder nur imaginär auftreten.

Da nun die, durch die Rotationsaxe gehende Ebene (24) die Oberfläche in einem Kegelschnitte schneidet, dessen Brennpunkte mit den Brennpunkten der Oberfläche zusammenfallen, so ist hierdurch das zweite Kepler'sche Gesetz bewiesen:

Die Planetenbahn ist ein Kegelschnitt. In einem Brennpunkte des Kegelschnittes liegt die Sonne.

Ob die Planetenbahn eine Ellipse, Parable oder Hyperbel sei, wird davon abhängen, ob die Rotationsoberfläche (26) ein Ellipsoid, ein Paraboloid oder ein Hyperboloid sei. Dieses erfahren wir, wenn wir die von dem Brennpunkte, in welchem die Sonne liegt, ausgehenden Radiivectoren in das Auge fassen, welche in die Rotationsaxe A fallen. Haben diese Radiivectoren die entgegengesetzte oder die gleiche Richtung, so ist die Oberfläche ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid. Ist einer der beiden Radiivectoren unendlich gross, so liegt ein Paraboloid vor.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Rotationsaxe werden ausgedrückt, wie folgt:

$$x = \pm r \frac{a_0}{A}, \quad y = \pm r \frac{a_1}{A}, \quad z = \pm r \frac{a_2}{A},$$
$$A = \sqrt{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)}.$$

Das eine Vorzeichen gilt für die Punkte, welche von dem Brennpunkte auf der einen Seite liegen, das andere für die Punkte der anderen Richtung. Setzen wir demnach die angegebenen Werthe der Coordinaten in die Gleichung der Oberfläche (26), so wird die Oberfläche ein Ellipsoid sein, wenn die den beiden Vorzeichen entsprechenden Werthe von r gleiche Vorzeichen haben.

Der Ausdruck V in (25) ist nach (28) folgender:

$$V = \frac{1}{C^2}(a_0 x + a_1 y + a_2 z).$$

Setzen wir in denselben die angegebenen Coordinaten, so erhalten wir:

$$V = \pm r \sqrt{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)},$$

woraus mit Berücksichtigung von (28) und des Determinantensatzes (10) hervorgeht:

$$V = \pm r \frac{B}{C}.$$

Setzen wir endlich diesen Werth von V in (26), so haben wir zur Bestimmung der beiden Radiivectoren, welche in die Rotationsaxe A fallen, die Gleichungen:

$$r - \frac{C^2}{\varkappa^2} \mp r \frac{B}{C} = 0.$$

Hieraus ergeben sich nun die beiden Radiivectoren r_0 und r_1 selbst:

$$(30) \quad \begin{aligned} r_0 &= \frac{C^3}{\varkappa^2(C+B)}, \\ r_1 &= \frac{C^3}{\varkappa^2(C-B)} = \frac{C^3}{\varkappa^2} \frac{(C+B)}{(C^2-B^2)} = -\frac{C^3(C+B)}{\varkappa^2} \cdot \frac{\varkappa^4}{2hC^4}. \end{aligned}$$

Da diese Ausdrücke von r_0 und r_1 von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen sind, je nachdem h negativ oder positiv ist, so entnehmen wir daraus Folgendes:

Die Planetenbahn ist eine Ellipse oder Hyperbel oder Parabel, je nachdem die Constante h der lebendigen Kraft negativ oder positiv ist oder verschwindet.

Durch Addition oder Multiplication der Gleichungen (30) ergiebt sich nun:

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad r_0 + r_1 = -\frac{\varkappa^2}{h}, \quad r_0 r_1 = \frac{C^2}{2h},$$

und aus der ersten von diesen Gleichungen die grosse Axe a der Planetenbahn, in welcher die reellen Brennpunkte liegen:

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a = -\frac{\varkappa^2}{2h}.$$

Um das dritte Kepler'sche Gesetz abzuleiten, müssen wir uns auf den Fall der elliptischen Bewegung des Planeten um die Sonne beschränken.

Da die Gleichung (9) der lebendigen Kraft aussagt, dass der Planet in gleicher Entfernung von der Sonne auch gleiche Geschwindigkeit hat, so muss von demselben die eine durch die grosse Axe getheilte Hälfte der Bahn in derselben Zeit T durchlaufen werden, als die andere. Wir erhalten demnach die halbe Umlaufszeit T des Planeten aus der Gleichung (14):

$$(33) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} T &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\left(2h + \frac{2\varkappa^2}{r} - \frac{C^2}{r^2}\right)}} \\ &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{(2hr^2 + 2\varkappa^2 r - C^2)}}, \end{aligned}$$

wobei wir bemerken, dass auf Grund von (31) der Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen für die beiden Werthe (30) r_0 und r_1 von r verschwindet. Dieses ist auch unmittelbar zu erkennen. Denn da r_0 der kleinste und r_1 der grösste Radiusvector der Planetenbahn ist, so müssen dieselben der Gleichung (13) genügen, wenn man in ihr $r' = 0$ setzt.

Um das bestimmte Integral (33) auf ein schon bekanntes zurückzuführen, differentiiren wir den Ausdruck $\sqrt{(2hr^2 + 2\varkappa^2 r - C^2)}$ ein Mal wirklich, das andere Mal nur andeutungsweise. Integriren wir dann wieder, so erhalten wir:

$$2h \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(2hr^2 + 2\varkappa^2 r - C^2)}} + \varkappa^2 \int \frac{dr}{\sqrt{(2hr^2 + 2\varkappa^2 r - C^2)}} = \sqrt{(2hr^2 + 2\varkappa^2 r - C^2)}$$

und daraus:

$$(34) \ldots\ldots \quad T = \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{(2hr^2 + 2\varkappa^2 r - C^2)}} = -\frac{\varkappa^2}{2h} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{(2hr^2 + 2\varkappa^2 r - C^2)}}.$$

Der Werth dieses Integrales lässt sich leicht abnehmnn aus dem Werthe des ähnlichen Integrals (65) in der zweiundzwanzigsten Vorlesung, welchen wir dort ohne Integration durch blosse geometrische Betrachtungen abgeleitet haben:

$$\pi = \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \frac{d\lambda}{\sqrt{-(\alpha^0 + \lambda)(\alpha' + \lambda)}},$$

Denn dividiren wir diese Gleichung durch $\sqrt{-A}$, so nimmt dieselbe die Form an:

$$(35) \ldots\ldots \quad \frac{\pi}{\sqrt{-A}} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(A\lambda^2 + B\lambda + C)}},$$

wenn die Grenzen des Integrales die Werthe von λ bedeuten, für welche der Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen verschwindet.

Verwerthen wir diese Integralformel für den vorliegenden Fall (34), so finden wir die halbe Umlaufszeit des Planeten:

$$(36) \ldots\ldots\ldots \quad T = -\frac{\varkappa^2}{2h} \frac{\pi}{\sqrt{-2h}},$$

Eliminiren wir endlich aus (36) und (32) die Integrationsconstante h der lebendigen Kraft, so erhalten wir:

$$(37) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2}{\varkappa^2},$$

eine Gleichung, welche unter der Annahme, dass die Anziehungskraft $\varkappa^2$ der Sonne von einem Planeten zu dem anderen sich nicht ändert, das dritte Kepler'sche Gesetz beweiset:

Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die Kuben der grossen Axen der Planetenbahnen.

Wir haben in dem Vorhergehenden die Kepler'schen Gesetze bewiesen unter der Annahme des Newton'schen Gesetzes der Anziehung und unter anderen Annahmen, die in der Natur nicht begründet sind. Indem wir die, der Natur widerstrebenden Annahmen fallen lassen, fassen wir unsere Aufgabe jetzt so: „Es soll die Bewegung der Sonne und des Planeten festgestellt werden unter der einzigen Annahme des Newton'schen Gesetzes der Anziehung.

Das D'Alembert'sche Princip giebt sofort die Differentialgleichungen, welche das vorgelegte Problem lösen:

$$\xi'' = -\frac{\mu^2 M(\xi - X)}{r^3}, \quad \eta'' = -\frac{\mu^2 M(\eta - Y)}{r^3}, \quad \zeta'' = -\frac{\mu^2 M(\zeta - Z)}{r^3}$$

$$(38) \quad X'' = \frac{\mu^2 m(\xi - X)}{r^3}, \quad Y'' = \frac{\mu^2 m(\eta - Y)}{r^3}, \quad Z'' = \frac{\mu^2 m(\zeta - Z)}{r^3},$$

$$r = \sqrt{\{(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2\}}.$$

Es bedeuten hier X, Y, Z die Coordinaten der Sonne mit der Masse M; ξ, η, ζ die Coordinaten des Planeten mit der Masse m, und μ die Anziehungskraft zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung. Die Coordinaten sind bezogen auf ein festes Coordinatensystem.

Um nun die relative Bewegung des Planeten um die Sonne, welche die Kepler'schen Gesetze zum Grunde legen, zu ermitteln, führen wir ein paralleles Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt die Sonne ist, unbekümmert darum, ob die Sonne sich auch bewegt. Wenn wir die Coordinaten des

Planeten in diesem, mit der Sonne fortschreitenden Coordinatensysteme mit x, y, z bezeichnen, so haben wir:

$$(39) \ldots \quad \xi - X = x, \quad \eta - Y = y, \quad \zeta - Z = z,$$

und aus den Differenzen der Gleichungen (38) erhalten wir folgende Differentialgleichungen für die relative Bewegung des Planeten:

$$(40) \quad \begin{gathered} x'' = -\mu^2(M+m)\frac{x}{r^3}, \quad y'' = -\mu^2(M+m)\frac{y}{r^3}, \quad z'' = -\mu^2(M+m)\frac{z}{r^3}, \\ r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}. \end{gathered}$$

Die Uebereinstimmung dieser Differentialgleichungen mit den Differentialgleichungen (1) unseres Fundamentalproblemes dient als Beweis dafür, dass der Planet sich um die Sonne gerade so bewegt, wie er sich bewegen würde, wenn die Sonne, als fester Punkt, den Planeten nach dem Newton'schen Gesetze anzöge.

Daraus folgen nun die Kepler'schen Gesetze auch für den vorliegenden Fall der freien Bewegung beider Himmelskörper. Die einzige Ausnahme macht das dritte Kepler'sche Gesetz. Denn, um die Gleichheit der Differentialgleichungen (40) und der Differentialgleichungen (1) vollkommen zu machen, müssen wir setzen:

$$(41) \ldots\ldots \quad \varkappa^2 = \mu^2(M + m),$$

wodurch die Gleichung (37), welche das dritte Kepler'sche Gesetz beweiset, übergeht in:

$$(42) \ldots\ldots \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2}{\mu^2(M + m)}.$$

Der rechte Theil dieser Gleichung ist aber nicht, wie in dem Fundamentalprobleme angenommen wurde, eine constante Grösse von einem Planeten zum anderen. Er ist nur dann constant, wenn der zweite Planet dieselbe Masse m hat, als der erste, und in diesem Falle trifft das dritte Kepler'sche Gesetz genau zu, im anderen Falle nicht. Das dritte Kepler'sche Gesetz trifft nur in so weit zu, als die Masse m des

Planeten gegen die grosse Masse M der Sonne in der Gleichung (42) vernachlässiget werden kann. Da nun dieses Gesetz seine Correction in der Gleichung (42) hat, so sieht man ungefähr ein, wie es den Astronomen möglich wird, durch Zeitmessung und Längenmessung aus der Gleichung (42) die Verhältnisse der Massen der Planeten und der Sonne festzustellen.

Kehren wir nun zu unserem Probleme zurück und zu den Differentialgleichungen (38), welche, auf ein festes Coordinatensystem bezogen, das Problem lösen. Sie verlangen zwölf Integrationen. Sechs von diesen Integrationen werden wir vollführen durch Anwendung eines Principes, welches die analytische Mechanik die Erhaltung des Schwerpunktes nennt. Die sechs anderen Integrationen sollen dann zurückgeführt werden auf die sechs, in unserer Fundamentalaufgabe schon geleisteten Integrationen.

Zu diesem Zwecke führen wir die Coordinaten a, b, c des Schwerpunktes der beiden Massen ein durch die Gleichungen:

$$(43) \qquad \frac{m\xi + MX}{m+M} = a, \quad \frac{m\eta + MY}{m+M} = b, \quad \frac{m\zeta + MZ}{m+M} = c,$$

mit dem Bemerken, dass dieselben noch unbekannte Functionen der Zeit sind. Multipliciren wir nun die drei ersten Gleichungen (38) mit m und addiren die darunter stehenden, mit M multiplicirten Gleichungen, so erhalten wir:

$$(44) \; \ldots\ldots \quad a'' = 0, \quad b'' = 0, \quad c'' = 0,$$

und durch Integration:

$$(45) \qquad a = \alpha t + \alpha_1, \quad b = \beta t + \beta_1, \quad c = \gamma t + \gamma_1;$$

Gleichungen, welche aussagen, dass der Schwerpunkt der Sonne und des Planeten sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer geraden Linie fortbewegt.

Wir führen ferner ein paralleles Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt in dem sich bewegenden Schwerpunkte liegt. In diesem Systeme sind die Coordinaten x, y, z des Planeten und die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 der Sonne bestimmt durch die Gleichungen:

$$(46)\qquad \begin{aligned} x &= \xi - a, & y &= \eta - b, & z &= \zeta - c, \\ X_1 &= X - a, & Y_1 &= Y - b, & Z_1 &= Z - c. \end{aligned}$$

In demselben Coordinatensysteme drücken sich nun mit Rücksicht auf (44) die drei ersten Gleichungen (38) so aus:

$$(47)\qquad \begin{gathered} x'' = -\frac{\mu^2 M(x - X_1)}{[r]^3}, \quad y'' = -\frac{\mu^2 M(y - Y_1)}{[r]^3}, \quad z'' = -\frac{\mu^2 M(z - Z_1)}{[r]^3}, \\ [r] = \sqrt{\{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2 + (z - Z_1)^2\}} \end{gathered}$$

und, da der Coordinatenanfangspunkt der Schwerpunkt des Systemes ist, so haben wir:

$$(48)\qquad mx + MX_1 = 0, \quad my + MY_1 = 0, \quad mz + MZ_1 = 0.$$

Setzen wir die, sich aus diesen Gleichungen ergebenden Sonnencoordinaten X_1, Y_1, Z_1 in die Gleichungen (47), so ergeben sich daraus die Differentialgleichungen der Bewegung des Planeten in Rücksicht auf ein, mit dem Schwerpunkte der Sonnen- und Planeten-Masse fortschreitendes Coordinatensystem:

$$(49)\qquad \begin{gathered} x'' = \frac{-\mu^2 M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \cdot \frac{x}{r^3}, \quad y'' = \frac{-\mu^2 M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \cdot \frac{y}{r^3}, \quad z'' = \frac{-\mu^2 M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \cdot \frac{z}{r^3}, \\ r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}. \end{gathered}$$

Dieses sind aber wieder Differentialgleichungen, welche auf die Differentialgleichungen (1) zurückkommen, wenn man setzt:

$$(50)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varkappa^2 = \frac{\mu^2 M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2},$$

Es beweiset dieses, dass der Planet sich um den Schwerpunkt von Sonne und Planet gerade so bewegt, wie er sich bewegen würde, wenn der Schwerpunkt, als fester Punkt, den Planeten nach dem Newton'schen Gesetze anzöge.

Die relative Bewegung des Planeten um den Schwerpunkt drückt sich nun aus in den vier Gleichungen (24), (23), mit

der Bezeichnung (18), in der letzten Gleichung (1) und in der Gleichung (14). Verlangt man die absolute Bewegung in Rücksicht auf das zu Anfang angenommene, feste Coordinatensystem, so hat man ausserdem noch die drei ersten Gleichungen (46) und die Gleichung (45) herbeizuziehen.

Von den zuletzt hervorgehobenen Sätzen stellt der eine die Bewegung des Planeten um die Sonne fest, das ist, um einen Punkt, der den Radiusvector in dem bestimmten Verhältnisse von 0 : 1 theilt; der andere giebt die Bewegung des Planeten um den Schwerpunkt, das ist, um einen Punkt, der den Radiusvector in dem bestimmten Verhältnisse der Massen von Sonne und Planet theilt.

Hieran schliesst sich nun die weitere Frage nach der Bewegung des Planeten um einen Punkt, der den Radiusvector in einem beliebig gegebenen Verhältnisse theilt. Bewegt sich um diesen Punkt der Planet auch so, wie in den beiden hervorgehobenen Fällen?

